Números e Operações – 3º Ano

Draft

Tópicos

Números naturais

Relações numéricas

Múltiplos e divisores

Operações com números naturais

Multiplicação

Divisão

Números racionais não negativos

Fracções

Decimais

Autoras

Fátima Mendes

Joana Brocardo

Catarina Delgado

Fátima Torres

Introdução

O aprofundamento da compreensão do sistema de numeração decimal tem, no 3º ano de escolaridade, especial ênfase. Por um lado e no que diz respeito aos números naturais, os alunos têm a oportunidade de realizar tarefas cujo propósito é o estabelecimento de relações entre os números, identificando, nomeadamente, números múltiplos e divisores de um número, utilizando números cada vez maiores. Por outro lado, é no 3º ano de escolaridade, que o estudo dos números racionais não negativos vai ser aprofundado. De facto, nos dois primeiros anos estes são trabalhados de modo intuitivo, assumindo especial relevância, nesta altura, a introdução de números representados na sua forma decimal ou recorrendo à sua representação na forma de fracção. Este trabalho deve ser feito recorrendo a problemas onde surjam diferentes significados das fracções e onde faça sentido recorrer à representação decimal de números racionais.

Neste ano, o trabalho em torno dos números e das operações desenvolve-se, sobretudo, em torno das operações multiplicação e divisão, uma vez que nos dois primeiros anos, o desenvolvimento do sentido de número esteve mais relacionado com as características dos números, as relações entre eles, as operações adição e subtracção e as suas propriedades. Ainda que de um modo informal e no contexto da resolução de problemas, o desenvolvimento de aspectos do sentido de número associados à multiplicação e à divisão estão presentes desde o 1º ano de escolaridade, mas é a partir do 2º ano e sobretudo no 3º ano que são formalizados e aprofundados os aspectos mais relacionados com a compreensão destas operações e das suas propriedades.

As sequências de tarefas aqui apresentadas assentam na importância da interligação entre tópicos e temas. Assim, apesar de estar indicado o tópico no qual se foca mais especificadamente cada uma das tarefas, estas propõem também a exploração de outros tópicos inter-relacionados, por exemplo, nas tarefas de Multiplicação são também abordados aspectos relacionados com o tópico Regularidades.

Operações com números naturais

Multiplicação

Divisão

As sequências de tarefas propostas têm como pano de fundo o desenvolvimento de aspectos fundamentais relacionados com as operações multiplicação e divisão que estão claramente expressos no programa de Matemática. No que diz respeito à operação divisão esta é abordada privilegiando a sua relação com a multiplicação.

Um primeiro aspecto diz respeito à compreensão, construção e memorização das tabuadas do 7, 8, 9, 11 e 12, usando o conhecimento sobre as tabuadas aprendidas e memorizadas no 2.º ano. Um outro aspecto que deve ser desenvolvido é a resolução de problemas envolvendo a operação multiplicação e a sua relação com a disposição rectangular de objectos. Assim, faz-se uma proposta que induz esta disposição promovendo a utilização de algumas propriedades desta operação. O exemplo apresentado fundamenta a importância de assumir como ponto de partida situações familiares às crianças.

Neste ano de escolaridade, é ainda fundamental que se desenvolvam estratégias de cálculo mental e escrito, recorrendo às propriedades da multiplicação, tanto em questões associadas a contextos da vida real como em questões em contextos matemáticos. Note-se que os contextos associados a esta operação devem ser múltiplos e variados de modo a proporcionar aos alunos a exploração de situações relacionadas com os diferentes sentidos da multiplicação. Considerando que nos anos anteriores os alunos resolveram problemas associados ao sentido aditivo e eventualmente ao sentido combinatório, propõe-se, neste ano de escolaridade, a resolução de problemas que partam de situações associadas a esses sentidos e também ao raciocínio proporcional, aspecto que é referido no Programa de Matemática, no tópico Regularidades.

No que diz respeito à operação divisão o objectivo principal é a resolução de problemas envolvendo os diferentes sentidos associados a esta operação tirando partindo da relação inversa entre esta operação e a multiplicação.

Uma vez que o Tópico relacionado com a multiplicação e divisão é de extrema importância neste ano de escolaridade, optou-se por construir duas sequências de tarefas, uma com problemas a serem proposto na aula de matemática durante o 1º e 2º períodos (sequência 2) e outra com problemas a serem trabalhados no 3º período. A que apresentamos agora é a 2ª sequência da multiplicação e divisão (que foi denominada por sequência 3 da brochura, uma vez que a sequência 1 é sobre Números naturais - relações numéricas; múltiplos e divisores). Nesta última sequência optou-se por não restringir o universo aos números naturais e utilizar números também na sua representação decimal.

Operações com números naturais

Sequência 3				
Tópicos	**Objectivos específicos**	**Notas**	**Tarefas**	**Organização temporal**
Multiplicação	Compreender a multiplicação no sentido combinatório. Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos. Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas	Recorrer a diversos tipos de representação usando tabelas e esquemas	**Organizar menus** **1** **2**	90 minutos (incluindo a exploração com a turma)
Multiplicação **Divisão**	Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional. Resolver problemas tirando partido da relação entre a multiplicação e a divisão. Resolver problemas envolvendo dinheiro. Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades. Compreender e usar a regra para calcular o produto e o quociente de um número por 10 e por 100. Compreender os efeitos das operações sobre os números.	Propor situações do quotidiano em que surja naturalmente a representação decimal. Usar diferentes representações para o mesmo produto. Usar estratégias de cálculo mental recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtracção e à propriedade comutativa. Usar relações de dobros e de dobros/metades. Usar relações entre múltiplos de 10 e 100.	**Comprar carteiras de cromos**	90 minutos (incluindo a exploração com a turma)
	Resolver problemas que envolvam a	Usar estratégias de	**Calcular**	90 minutos (incluindo

	multiplicação em contextos diversos. Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades. Compreender e realizar algoritmos para a operação multiplicação. Compreender os efeitos das operações sobre os números.	cálculo mental recorrendo às propriedades da multiplicação. Promover a aprendizagem gradual dos algoritmos, integrando o trabalho realizado associado a estratégias de cálculo mental e escrito. Começar por usar representações mais detalhadas dos algoritmos.	**como …**	a exploração com a turma)
	Resolver problemas tirando partido da relação entre a multiplicação e a divisão. Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades. Compreender a divisão nos sentidos de medida e partilha. Compreender os efeitos das operações sobre os números.	Usar estratégias de cálculo mental recorrendo às propriedades da multiplicação. Usar relações de dobros e de dobros/metades. Usar relações entre múltiplos de 10 e 100.	**Cromos e mais cromos…**	90 minutos (incluindo a exploração com a turma)
	Multiplicar utilizando a representação horizontal. Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades. Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação divisão tirando partido da multiplicação e suas propriedades. Compreender os efeitos das operações sobre os números.	Usar estratégias de cálculo mental para resolver problemas de divisão tirando partido da relação inversa com a multiplicação. Usar diferentes representações para o mesmo produto. Usar relações de	**Calcular em cadeia com a multiplicação e a divisão** **1** **2**	15 minutos para cada cadeia

		dobros e de dobros/metades.		

Organizar menus

Quantos tipos de sandes?

Tipos de pão

- Pão de centeio
- Pão de trigo

Ingredientes

- Queijo
- Fiambre
- Manteiga

Quantos menus?

Menus

- Uma sandes
- Uma bebida
- Uma peça de fruta

Atenção!

Quem bebe sumo de laranja não pode comer laranja.

E quem bebe sumo de maçã não pode comer maçã.

Bebidas

- Sumo de laranja
- Sumo de maçã

Frutas

- Laranja
- Maçã
- Banana

Tarefa 1 – Organizar menus

Materiais

- Fotocópia da folha da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Multiplicar usando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito;
- Resolver problemas que envolvam a multiplicação em diferentes contextos;
- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades.

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Compreender a multiplicação no sentido combinatório;
- Resolver problemas que envolvam a multiplicação no sentido combinatório;
- Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas.

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como propósito explorar a multiplicação no seu sentido combinatório. A ideia é explorar inicialmente a primeira parte da tarefa *Quantos tipos de sandes?* Os alunos são convidados a observar atentamente a imagem e a formular um problema relacionado com ela. Qualquer que seja a história inventada a questão é fazer sandes, utilizando para o efeito dois tipos de pão e três tipos de ingredientes. Com estes dados que sandes diferentes são possíveis fazer?

A partir daqui os alunos devem responder à questão, organizados em grupos de 2 ou 3. Quando quase todos os grupos tiverem resolvido o problema, o professor deve generalizar a discussão sugerindo que alguns apresentem e explicitem os seus processos de resolução. Deste modo os alunos desenvolvem aspectos da comunicação matemática.

Esta discussão, orquestrada pelo professor, para além de ter como finalidade a discussão e reflexão sobre as estratégias usadas pelos alunos, tem ainda como objectivo, apresentar explicitamente modos de organizar informação. De facto, se não surgir, da parte dos alunos, nenhum procedimento em que os dados estejam organizados em tabela ou através de um esquema em árvore, estes modos de organização devem ser apresentados pelo professor, como procedimentos que facilitam a resposta à questão inicial. Ao representar informação e ideias matemáticas de diversas formas, que os alunos podem usar em outros contextos, o professor contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática, uma das capacidades transversais valorizada no Programa de Matemática do Ensino Básico.

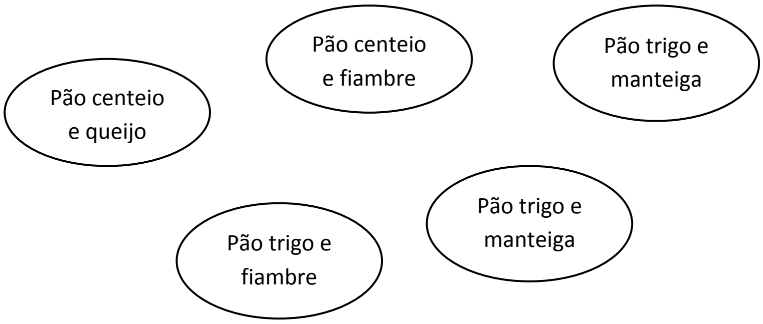
Depois de todo o trabalho realizado em torno da primeira parte da tarefa, é lançado o desafio *Quantos menus?* À semelhança do anterior, também os alunos devem formular problemas associados à imagem, cujo objectivo é fazer diferentes tipos de menus, de acordo com um conjunto de condições, expressas nos placares:

- Cada menu inclui uma sandes, um sumo e uma peça de fruta;
- Os tipos de sandes diferentes correspondem aos identificados na situação anterior;
- Os sumos podem ser de laranja e maçã;
- As peças de fruta podem ser laranja, maçã e banana;
- Se um menu incluir sumo de laranja não inclui a peça de fruta laranja;
- Se um menu incluir sumo de maçã não inclui a peça de fruta maçã.

As condições devem ser identificadas em conjunto e, a partir daí os alunos, novamente, em grupo, resolvem o problema proposto. Após o tempo que o professor considerar adequado, procede-se à apresentação e discussão das estratégias utilizadas pelos vários grupos, comparando-as, relacionando-as e identificando as suas potencialidades. Para além disso é fundamental que o professor recorra às intervenções dos alunos e as aproveite para relacionar os processos utilizados com a operação multiplicação.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na resolução do problema *Fazer sandes* os alunos podem seguir caminhos muito diversificados. Alguns fazem representação através de desenhos simulando os tipos de pão diferentes, o queijo, a manteiga e o fiambre. Estas representações podem ser organizadas de modo a sugerir um processo facilitador da contagem ou estarem dispersas na folha do aluno. Ilustra-se um exemplo em que as representações estão desorganizadas e incompletas.



Um outro procedimento natural na resolução de problemas desta natureza é usar as palavras, de modo mais ou menos organizado, para representar e associar os diferentes tipos de pão e ingredientes, tal como se exemplifica:

Pão de centeio com queijo
Pão de centeio com fiambre
Pão de centeio com manteiga

Pão de trigo com queijo
Pão de trigo com fiambre
Pão de trigo com manteiga

3+3=6

Há 6 tipos de sandes diferentes.

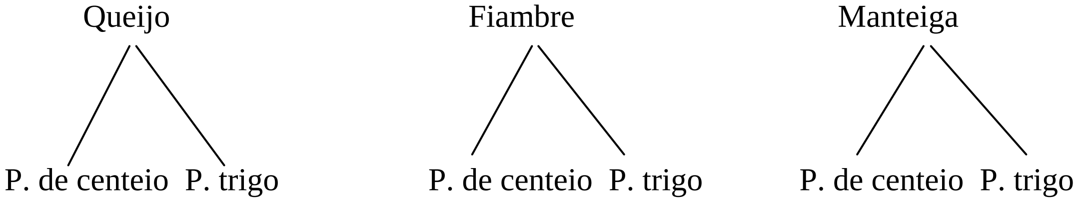
Há alunos que usam representações associando esquemas a palavras.

Começando pelos tipos de pão:

Pão de centeio			Pão de trigo		
Queijo	Fiambre	Manteiga	Queijo	Fiambre	Manteiga
1	1	1	1	1	1

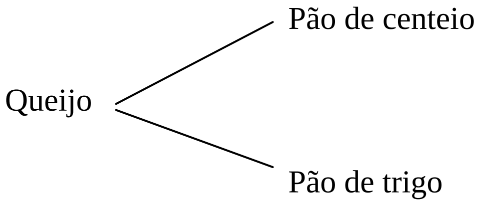
Há 6 tipos de sandes diferentes, 3 de pão de centeio e 3 de pão de trigo, isto é, 3+3=6 ou 2x3=6.

Começando pelos ingredientes:



Há 6 tipos de sandes diferentes, 2 com queijo, 2 com fiambre e 2 com manteiga, isto é, 2+2+2=6 ou 3x2=6. É natural haver mais alunos que usem a expressão 2+2+2 e, nesse caso, cabe ao professor relacioná-la com o uso da multiplicação 3x2.

Estes dois tipos de esquemas muitas vezes são efectuados pelos alunos, na horizontal, da esquerda para a direita, como no exemplo:



Alguns alunos podem organizar os dados numa tabela, sobretudo se, anteriormente, já tiveram contacto com esta representação, por exemplo a propósito de tópicos relacionados com o tema Organização e Tratamento de Dados.

Ingredientes / Pão	Queijo	Fiambre	Manteiga
Pão de centeio	X	X	X
Pão de trigo	X	X	X

Os 6 tipos de sandes diferentes surgem da contagem directa dos cruzamentos linha/coluna ou coluna/linha ou pensando logo em termos da disposição rectangular: contando um a um, fazendo 2x3 ou 3x2.

A representação em tabela pode ser feita de outra maneira, começando pelos ingredientes.

Pão / Ingredientes	Pão de centeio	Pão de trigo
Queijo	X	X
Fiambre	X	X
Manteiga	X	X

Neste caso, para além dos 6 tipos de sandes diferentes surgirem também da contagem directa dos cruzamentos linha/coluna ou coluna/linha, o pensar em termos da disposição rectangular faz surgir 3x2 ou 2x3.

Tal como foi referido anteriormente, no caso destas duas últimas representações não surgirem naturalmente a partir dos procedimentos usados pelos alunos, o professor deve construí-los, por exemplo no quadro, evidenciando a facilidade de organização e de relacionamento dos dados entre si. A multiplicação surge associada à disposição rectangular. Em vez de serem contadas todas as combinações possíveis uma a uma, multiplica-se o número de linhas pelo número de colunas ou o número de colunas pelo número de linhas. Conforme o caso surge 3x2 ou 2x3, sendo este um bom pretexto para evidenciar a propriedade comutativa da multiplicação.

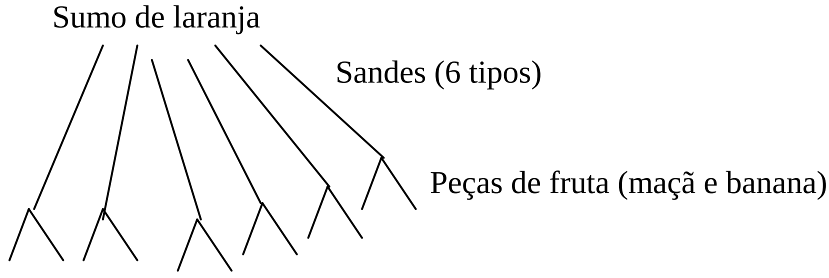
Espera-se que alguns grupos evoluam nos seus procedimentos de resolução do problema *Quantos menus?* sobretudo os que usaram processos mais informais e pouco organizados, uma vez que as estratégias relacionadas com o problema anterior foram apresentadas e discutidas em grande grupo pelo professor e pelos alunos. No entanto, tendo em conta as combinações que incluem três tipos de alimentos (sumos, sandes e fruta) há alunos que não conseguem usar procedimentos adequados e organizados, o que dificulta a identificação de todas as combinações. Muitas vezes fazem alguns dos trios possíveis mas desorganizados, o que não lhes permite detectar as hipóteses que faltam.

Os possíveis caminhos a seguir pelos alunos e que conduzem a respostas correctas, dependem de considerarem ou não, à partida, as condições associadas às relações entre sumos e peças de fruta. Estas impedem que a tarefa seja resolvida usando apenas a multiplicação dos diferentes tipos de dados envolvidos.

Os alunos que identificarem as condições que limitam a combinação da peça de fruta com o sumo da mesma podem excluir, de imediato, algumas situações. Assim são usados procedimentos do tipo:

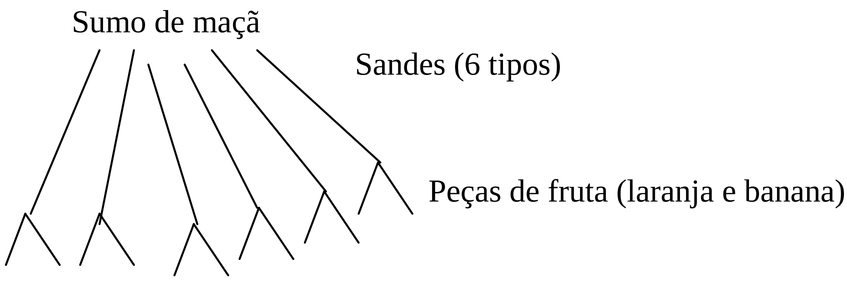
– Fazer um esquema, considerando inicialmente os sumos e excluindo as combinações não permitidas

Menus com sumo de laranja



Há 12 menus com sumo de laranja. Podem ser contados um a um ou usando a multiplicação 1x6x2=12

Menus com sumo de maçã



Há 12 menus com sumo de maçã. Podem ser contados um a um ou usando a multiplicação 1x6x2=12

No total, há 12 menus com sumos de laranja e 12 menus com sumos de maçã, ou seja, 24 menus diferentes. Relacionando com a multiplicação obtém-se 24 menus através de 2x6x2.

– Fazer duas tabelas, uma para cada tipo de sumo, excluindo as combinações não permitidas

Menus com sumo de laranja

Sandes / Fruta	Centeio Queijo	Centeio Fiambre	Centeio Manteiga	Trigo Queijo	Trigo Fiambre	Trigo Manteiga
Maçã	X	X	X	X	X	X
Banana	X	X	X	X	X	X

Menus com sumo de maçã

Sandes / Fruta	Centeio Queijo	Centeio Fiambre	Centeio Manteiga	Trigo Queijo	Trigo Fiambre	Trigo Manteiga
Laranja	X	X	X	X	X	X
Banana	X	X	X	X	X	X

À semelhança do exemplo anterior, no total, há 12 menus com sumo de laranja e 12 menus com sumo de maçã, ou seja, 24 menus diferentes. No caso das tabelas é mais fácil associar com a disposição rectangular com a multiplicação, efectuando 2 vezes 2x6 ou 2 vezes 6x2.
As expressões 2x (6x2) =24 ou 2x (2x6) =24 surgem em cada uma das tabelas, conforme se inicia o cálculo pela linha ou pela coluna.

Podem surgir resoluções do problema, incluindo todas as combinações possíveis com sumos, tipos de sandes e peças de fruta, excluindo no final as situações não permitidas. Exemplos de tabelas ilustrativas desta resolução podem ser:

Menus com sumos de laranja

Sandes / Fruta	Centeio Queijo	Centeio Fiambre	Centeio Manteiga	Trigo Queijo	Trigo Fiambre	Trigo Manteiga
Maçã	X	X	X	X	X	X
Banana	X	X	X	X	X	X
~~Laranja~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~

Menus com sumos de maçã

Sandes / Fruta	Centeio Queijo	Centeio Fiambre	Centeio Manteiga	Trigo Queijo	Trigo Fiambre	Trigo Manteiga
Laranja	X	X	X	X	X	X
Banana	X	X	X	X	X	X
~~Maçã~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~

As combinações a excluir de acordo com as condições do problema são as assinaladas a cores. Em termos simbólicos a situação pode ser representada, em cada caso, por 3x6-1x6 e nos dois casos por 2x (3x6-1x6). Esta expressão é equivalente à encontrada na resolução anterior, isto é, 2x (3x6-1x6) = 2x (2x6).

Comprar carteiras de cromos

Papelaria do Sr. António

Número de carteiras de cromos	Preço (Euros)
2	3
10	
20	
30	
80	
100	
120	
200	

Escola da Raquel

Ano de escolaridade	Alunos
1º	60
2º	100
3º	110
4º	90

Tarefa 2 – Comprar carteiras de cromos

Materiais

– Fotocópia da folha da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

– Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação;

– Multiplicar usando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito;

– Resolver problemas que envolvam a multiplicação em diferentes contextos;

– Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades.

Ideias e procedimentos a desenvolver

– Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional

– Investigar regularidades numéricas

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como propósito explorar algumas regularidades dos números organizados em tabelas, relacionando aspectos da multiplicação com o raciocínio proporcional. A ideia é desafiar os alunos a observarem atentamente as imagens da folha do aluno e formularem problemas a partir destas. Podem surgir formulações associadas simplesmente ao preenchimento da tabela ou serem propostas situações, mais elaboradas, que envolvam a compra de carteiras de cromos para serem oferecidas no final do ano aos alunos da escola da Raquel.

Os problemas que surgem estão associados a situações verídicas de ofertas feitas aos alunos das escolas por entidades tais como Juntas de Freguesia, Câmaras Municipais, etc. É fundamental que o preenchimento da tabela seja uma das primeiras sugestões, quaisquer que sejam os problemas inventados. De facto, a ideia inicial é preencher a tabela dos preços das carteiras de cromos estabelecendo relações de tipo proporcional entre os números envolvidos.

Considerando que, na tabela depois de completa, estão identificados os preços de diferentes quantidades de carteiras de cromos, surgem questões do tipo:

- O Presidente da Junta quer oferecer uma carteira de cromos a cada um dos alunos do 1º ano. Que dinheiro gastará?
- O Presidente da Junta quer oferecer uma carteira de cromos a cada um dos alunos do 1º e 2º anos. Que dinheiro gastará?
- O Presidente da Junta quer oferecer uma carteira de cromos a cada um dos alunos da escola da Raquel. Que dinheiro gastará?

Tanto no preenchimento da tabela como nas respostas a questões semelhantes às dos exemplos o objectivo é que os alunos interpretem a tabela e identifiquem algumas relações entre os números utilizados. Assim, nas respostas a todas as perguntas do tipo das anteriores, excepto no caso em que o total dos alunos é 100, estes têm de fazer diferentes composições associadas ao número de alunos pretendido e fazer a sua correspondência com os respectivos preços. Por exemplo, para saberem quanto se gastará se for oferecida uma carteira de cromos a todos os 110 alunos do 3º ano podem adicionar o preço de 10 carteiras (na tabela) com o preço de 100 carteiras (na tabela).

Após uma exploração em grupo-turma das questões formuladas pelos alunos, o professor deve seleccionar algumas do tipo das exemplificadas, de modo que os alunos possam estabelecer as relações pretendidas. A resposta a estas questões deve ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos e, posteriormente, feita a discussão das diferentes estratégias usadas, novamente com toda a turma. O objectivo desta discussão final é a apresentação e comparação dos diferentes processos utilizados, evidenciando estratégias mais potentes.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Depois de formuladas questões às quais os alunos tentam dar resposta vários caminhos podem surgir. No preenchimento da tabela as relações que são estabelecidas dependem da ordem pela qual este é efectuado.

Por exemplo, um grupo de alunos pode optar por preencher primeiro a linha do 20 e do 200, evidenciando assim a multiplicação por 10 e por 100. No caso de preencherem o preço de 10 carteira depois de saberem o preço de 20, basta estabelecerem uma relação de metade. O mesmo acontece se preencherem o preço de 100 carteiras depois de saberem o preço de 200. Para preencherem o preço de 30 podem fazê-lo a partir da adição dos preços de 10 e de 20 carteiras. Um procedimento semelhante pode ser utilizado para saber o preço de 120 carteiras. Finalmente, para preencher o preço de 80 carteiras podem seguir-se dois tipos de estratégias, umas multiplicativas, partindo do preço de 20 e multiplicar por 4 ou partir do preço de 10 e multiplicar por 8, ou ainda partir do preço de 100 e retirar o preço de 20 carteiras.

No caso dos alunos optarem por preencher a tabela sequencialmente, o preço de 10 carteiras surge como o quíntuplo do preço de 2 e, a partir daí toda a tabela pode ser completada recorrendo a estratégias de tipo multiplicativo e/ou aditivo, do tipo das descritas anteriormente.

Pode haver alunos que recorram inicialmente ao preço unitário de uma carteira de cromos e, a partir daí todos os preços podem ser calculados usando uma estratégia multiplicativa. É importante realçar que, esta opção implica o cálculo multiplicativo em que um dos factores é um número racional não inteiro, na sua representação decimal (1,5 €). No entanto, considerando que na altura em que esta tarefa pode ser proposta aos alunos, eles já conhecem estes números e 1,5 é um número de referência, pode ser uma boa ocasião para discutir também as relações que decorrem da utilização do preço unitário. Assim surgem os seguintes cálculos 10x1,5; 20x1,5; 30x1,5 … 100x1,5 e 200x1,5 que também podem ser relacionados entre si, a partir de relações multiplicativas importantes (dobros, múltiplos de 10 e de 100) e composições recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (30x1,5= 10x1,5+20x1,5 logo 30x1,5=15+30=45).

Depois da tabela preenchida, a segunda parte da tarefa corresponde às respostas para as questões formuladas. Exemplificando com as questões ilustradas, também aqui os alunos podem recorrer a procedimentos diversos. O preço de 60 carteiras de cromos pode ser calculado adicionando (o preço de 30+30 carteiras) ou multiplicando (o dobro do preço de 30 carteiras).

Na resposta à segunda questão os alunos podem partir do total de alunos de 1º e 2º ano e calcular o preço de 160 (60+100) carteiras de cromos, usando diversos procedimentos. Por exemplo, adicionando o preço de 60 com o preço de 100 carteiras, ou multiplicando (usando o dobro do preço de 80 carteiras ou 16 vezes o preço de 10 carteiras). Existem outras estratégias de tipo aditivo ou subtractivo embora estas sejam mais demoradas, uma vez que podem envolver procedimentos mais repetitivos e menos eficazes. Estes procedimentos baseados em estratégias aditivas ou subtractivas são semelhantes aos ilustrados inicialmente a propósito do preenchimento da tabela de preços.

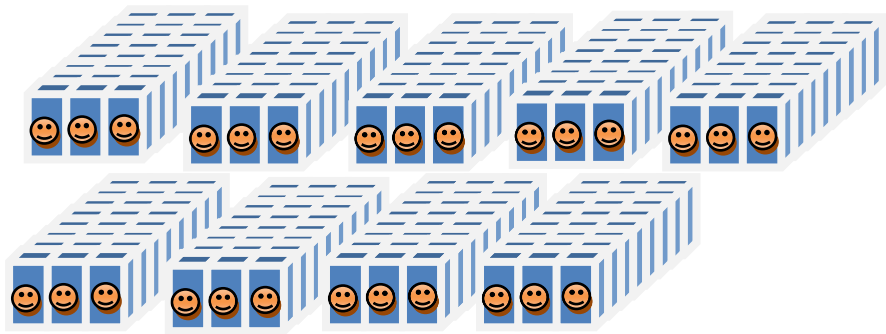
No caso da resolução do problema associado ao preço do total de carteiras de cromos para todos os alunos, uma vez que estes são 360, também há várias maneiras de cálculo. No entanto, devem ser privilegiadas as estratégias multiplicativas, por exemplo, identificando que 360 é o triplo de 120 e o preço de 120 carteiras pode ser identificado na tabela. Há também outras estratégias que recorrem simultaneamente a cálculo multiplicativo e aditivo, decompor 360 em 3x100+60 ou em 200+2x80 e fazer os cálculos correspondentes aos preços associados. Tal como nos problemas anteriores podem ser usadas estratégias apenas aditivas mas são mais demoradas, menos eficientes e com maior probabilidade de enganos.

Os alunos que calcularam o preço unitário podem sempre multiplicar o respectivo número de carteiras de cromos em cada um dos problemas por 1,5 €. Nas multiplicações associadas não é necessário usar o algoritmo, uma vez que há outros processos mais flexíveis que recorrem ao uso das propriedades da multiplicação. Por exemplo, para efectuar 160x1,5 os alunos podem utilizar:

- a decomposição do 160 em 100+60, 160x1,5=100x1,5+60x1,5 ou seja 160x1,5=150+6x10x1,5 ou seja 160x1,5=150+6x15=150+90=240
- a decomposição do 160 em 2x80, 160x1,5=2x80x1,5 ou seja identificam na tabela o preço de 80 carteiras e duplicam
- a decomposição do 1,5 em 1+0,5, 160x1,5=160x(1+0,5) ou seja 160x1,5=160+160x0,5= 160+80=240.

Calcular como ...

O Duarte, o João e a Raquel resolveram contar os pacotes de leite escolar que sobraram, no último dia de aulas antes das férias da Páscoa. Na arrecadação da escola contaram 9 paletes, cada uma com 24 pacotes de leite.



– E agora como vamos fazer para calcular o número de pacotes de leite? - Diz o João.
– Tenho uma ideia! Cada um vai calcular como quer e depois vemos se encontramos o mesmo número! – Propõe o Duarte.

O cálculo do Duarte

9x24=10x24-1x24; 10x24-1x24=240-24; 240-24=216

9x24=216

O cálculo da Raquel

9x24=9x20+9x4=216

180 + 36

216

9x24=216

O cálculo do João

24	(20+4)
x 9	
180	(9x20)
+36	(9x4)
216	

9x24=216

1. Compreendes como calcularam o Duarte, a Raquel e o João? Compara as diferentes formas de calcular.

Calcular como ...

2. Na escola da Ana também sobraram pacotes de leite, quando começaram as férias da Páscoa. Foram contadas 7 paletes de 24 pacotes.
   Calcula o número de pacotes de leite que sobraram usando a forma de cálculo da Raquel e do João. Compara-as entre si.

Calcular como a Raquel

Calcular como o João

Calcular como ...

3. Para cada um dos problemas seguintes escolhe uma forma de cálculo e resolve-os.

O Nuno quer ir com 5 amigos ver um jogo de futebol da Selecção Nacional. Os bilhetes mais baratos custam 21 € e os mais caros custam 75 €. Se comprarem os bilhetes mais baratos quanto gastam? E se optarem pelos mais caros?

A Mariana faz colecção de baralhos de cartas para jogar com temas diferentes. Já tem 12 conjuntos, cada um com 25 cartas. No total, quantas cartas tem?

O Miguel vai a um concerto numa grande sala de espectáculos. Quando comprou o bilhete percebeu que a sala está organizada em 7 zonas diferentes. Cada zona tem 237 lugares sentados. Quantos lugares tem a sala de espectáculos?

Tarefa 3 – Calcular como …

Materiais

– Fotocópia das folhas da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

– Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação;

– Resolver problemas que envolvam a multiplicação em diferentes contextos;

– Compreender os efeitos das operações sobre os números.

Ideias e procedimentos a desenvolver

– Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades.

– Compreender e realizar algoritmos para a operação multiplicação.

– Resolver problemas que envolvam a multiplicação em diferentes contextos;

Sugestões para exploração

Esta tarefa está organizada em três partes diferentes, que devem ser exploradas separadamente. A primeira parte tem como propósito que os alunos observem atentamente as três formas de cálculo usadas pelo Duarte, Raquel e João e que estabeleçam conexões entre elas. Assim, o professor deve organizar a discussão com toda a turma, de modo que os alunos descrevam as várias formas de cálculo, identificando semelhanças e diferenças entre elas. Um dos objectivos desta discussão é estabelecer relações entre as resoluções da Raquel e do João e caminhar gradualmente no sentido da introdução do algoritmo da multiplicação.

A resolução do Duarte é claramente uma resolução baseada no cálculo mental. De facto, Duarte primeiro teve de “olhar para os números” para pensar no que podia fazer a partir deles. Apenas porque um dos factores é o 9, utilizou a estratégia de fazer um cálculo mais “redondo” recorrendo ao 10 e depois compensando. Esta maneira de calcular, de modo flexível e eficaz, de acordo com os números envolvidos, revela o seu sentido de número. Como pano de fundo está o conhecimento sobre a multiplicação e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção.

Raquel também usa a propriedade distributiva da multiplicação, mas em relação à adição. Revela um conhecimento sobre o sistema de numeração e a decomposição decimal, transformando o 24 em 20+4 e calculando os produtos parciais.

João utiliza um procedimento muito semelhante ao de Raquel mas em vez de fazer o cálculo horizontal faz o cálculo na vertical. Observando os seus registos, também decompõe o 24 em 20+4 e calcula os produtos parciais, embora represente todos os cálculos na vertical, com uma determinada organização. O procedimento usado por João não é um algoritmo, uma vez que ele trabalha com os números e não com dígitos, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No entanto, é um procedimento ordenado com números, com determinadas regras, que permite evoluir progressivamente para o cálculo algorítmico, com a compreensão necessária sobre o que se faz e porque se faz.

É importante na sala de aula treinar o cálculo algorítmico, que tem características particulares a nível da matemática e faz parte de uma tradição portuguesa. No entanto, é fundamental que este treino se faça depois dos alunos terem um domínio bastante grande sobre a operação multiplicação e as suas propriedades, de modo a efectuarem cálculos com compreensão e de modo flexível. Esta compreensão ajudá-los-á também na compreensão do algoritmo tradicional, tal como habitualmente se representa.

Na segunda parte da tarefa propõe-se explicitamente que os alunos resolvam o problema de duas maneiras. Inicialmente, fazendo um registo horizontal, calculando o produto decompondo o multiplicando e usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A seguir, o procedimento matemático é o mesmo mas o registo dos cálculos é efectuado na vertical, obedecendo a uma determinada organização. Deste modo, espera-se que os alunos estabeleçam o paralelismo entre as duas formas de calcular, caminhando no sentido do algoritmo tradicional.

Na terceira parte da tarefa, os alunos são convidados a resolver os diferentes problemas, usando uma forma de cálculo que considerem adequada. No final da resolução dos três problemas são discutidas e analisadas as várias estratégias usadas pelos alunos, relacionando-as com os números envolvidos e a facilidade e rapidez da sua utilização.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na terceira parte da tarefa os alunos podem seguir vários caminhos. São ilustrados alguns deles.

No primeiro problema é necessário calcular 6x21 e 6x75. Para calcular 6x21 é mais rápido usar o cálculo mental, não se justificando o uso do registo vertical próximo do algoritmo.

– Cálculo horizontal usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

  6x21=6x20+6x1; 6x21=120+6=126

O mesmo acontece no caso 6x75, não se justifica o uso do registo vertical próximo do algoritmo. No entanto pode haver alunos a calcular desse modo.

– Cálculo horizontal usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

  6x75=6x70+6x5; 6x75=420+30=450

– Cálculo horizontal recorrendo ao uso dos dobros e das metades

  6x75=3x150; 3x150=2x150+150; 3x150=300+150=450 logo 6x75=450

– Cálculo vertical próximo do algoritmo usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$\begin{array}{rl} 75 & (70+5) \\ \times\ 6 & \\ \hline 420 & (6x70) \\ +30 & (6x5) \\ \hline 450 & \end{array}$$

No segundo problema os números, sendo de referência, sugerem o uso de um cálculo mental flexível e adequado a eles. Pode haver alunos que recorram ao registo vertical mas neste caso é importante incentivá-los a “olhar para os números” antes de decidir como vão calcular.

– Cálculo horizontal usando as metades e os dobros

  12x25=6x50=300

No terceiro problema, “olhando para os números” não se identifica nenhuma sua característica que permita calcular de modo flexível. Logo podem usar-se procedimentos que funcionam sempre, quaisquer que sejam os números – uso da decomposição decimal e da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

– Cálculo horizontal usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

  7x237=7x200+7x30+7x7; 7x237=1400+210+49=1659

– Cálculo vertical próximo do algoritmo usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$\begin{array}{rl} 237 & (200+30+7) \\ \text{x } 7 & \\ \hline 1400 & (7\text{x}200) \\ 210 & (7\text{x}30) \\ 49 & (7\text{x}7) \\ \hline 1659 & \end{array}$$

Cromos e mais cromos...

Quantas carteiras?

Quantos cromos para cada um?

Tarefa 4 – Cromos e mais cromos...

Materiais

– Fotocópia da folha da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

– Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação;

– Multiplicar usando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito;

– Resolver problemas que envolvam a multiplicação em diferentes contextos;

– Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades.

Ideias e procedimentos a desenvolver

– Resolver problemas tirando partido da relação entre a multiplicação e a divisão;

– Compreender a divisão nos sentidos de medida e de partilha

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como propósito explorar contextos de divisão, de modo a facilitar o entendimento dos alunos sobre esta operação. Neste sentido, a tarefa deve ser realizada com os alunos antes de estes conhecerem o algoritmo da divisão, considerando que se pretende a compreensão da operação divisão e das relações entre esta e as outras operações. Apesar de, desde o primeiro ano, os alunos resolverem problemas cujo contexto é de divisão usando as estratégias adequadas ao conhecimento que têm sobre os números e as operações, no terceiro ano é importante que seja identificada, explicitamente, a relação que existe, em particular, entre a multiplicação e a divisão.

Uma vez que a divisão é a operação inversa da multiplicação[1], é fundamental apresentar aos alunos situações que relacionem estas operações. A partir do momento em que os alunos já resolveram bastantes problemas de multiplicação em contextos diversificados, é essencial que lhes sejam propostos também contextos de divisão.

No início, na resolução de problemas de divisão, os alunos usam estratégias ligadas ao contexto do problema e relacionadas com as outras operações. No entanto é necessário que compreendam que as estratégias relacionadas com a multiplicação são mais potentes e eficazes e, deste modo, identificam, gradualmente, a estreita relação entre estas duas operações. Para que esta compreensão seja desenvolvida é fundamental, na sala de aula, que o professor organize momentos de interacção com todos os alunos, em que estes explicitem as estratégias utilizadas e estas sejam comparadas com as de outros colegas, reconhecendo as suas semelhanças e diferenças.

A tarefa *Cromos e mais cromos…* parte de duas imagens que incluem situações de divisão diferentes. A primeira apela ao sentido de divisão por medida e, a partir dela, pode ser formulado um problema do tipo:

– Uma criança interroga-se sobre quantas carteiras, com 8 cromos cada, são necessárias comprar (ou ter) para possuir uma colecção com um total de 176 cromos.

Nesta situação os alunos sabem a medida do grupo (8 cromos), que corresponde ao número de cromos que tem cada carteira, e necessitam de saber quantos grupos (carteiras) de 8 cromos podem fazer com um total de 176.

A segunda imagem apela ao sentido de divisão por partilha. Um exemplo de uma formulação de um problema é o seguinte:

– Pensando num total de 144 cromos, os alunos interrogam-se sobre com quantos cromos fica cada uma das crianças da imagem, se os partilharem igualmente.

Nesta situação os alunos têm um total de 144 cromos para repartir por 6 grupos (crianças) e necessitam de procurar com quantos elementos (cromos) fica cada grupo.

[1] Note-se que a divisão é a operação inversa da multiplicação, em universos numéricos adequados, neste caso, no conjunto dos números inteiros positivos excepto o zero.

A ideia é propor aos alunos que observem com atenção as imagens, uma de cada vez, e desafiá-los a formular um problema adequado. Os problemas formulados podem ser diferentes em termos da história inventada pelos alunos mas, em termos da situação de divisão, serão semelhantes aos exemplos apresentados. A história associada pode ser inventada e discutida por todos. O professor deve orientar os alunos no sentido de ser construída uma única história que contextualiza o problema que é resolvido por todos. Este deve ser realizado em grupos de 2 ou 3 alunos e após a sua resolução deve ser discutido em conjunto de modo a serem explicitadas as diferentes estratégias, serem comparadas e estabelecidas relações entre elas.

A história e o problema relacionados com a segunda imagem devem ser construídos após a discussão resultante da resolução do primeiro problema. Deste modo, alguns alunos podem evoluir no uso de estratégias de resolução, depois de terem compreendido as estratégias dos colegas e de as terem comparado com as suas.

Na discussão das estratégias usadas pelos alunos é importante a sua apresentação da mais informal, mais demorada e susceptível de enganos, para a mais rápida e eficaz. Neste caso, o professor deve identificar alguns grupos de alunos com resoluções diferentes e propor-lhes que as apresentem aos colegas, pela ordem sugerida.

É natural que os alunos que recorrem a procedimentos subtractivos se enganem a fazer alguma das subtracções, porque envolvem decomposições do aditivo. Mesmo aqueles que optam por adicionar sucessivamente, considerando o número de adições envolvidas, têm muitas probabilidades de cometer algumas incorrecções. Os aspectos relacionados com processos morosos e susceptíveis de engano podem ser evidenciados pelos alunos durante a discussão das resoluções dos problemas e, no caso de não o serem, o professor deve realçá-los.

Há alunos que em situações de divisão regridem no uso de estratégias, em comparação com as que já utilizam nos problemas de multiplicação. Este facto está relacionado com a compreensão da própria operação divisão. No sentido de melhorar essa compreensão deve ser evidenciada a relação divisão/multiplicação, de modo que os alunos associem uma operação a outra, fazendo afirmações onde se relaciona a divisão com factos conhecidos da multiplicação:

– 16 cromos são 2 carteiras de 8, ou seja, 16:8=2 porque 2x8=16

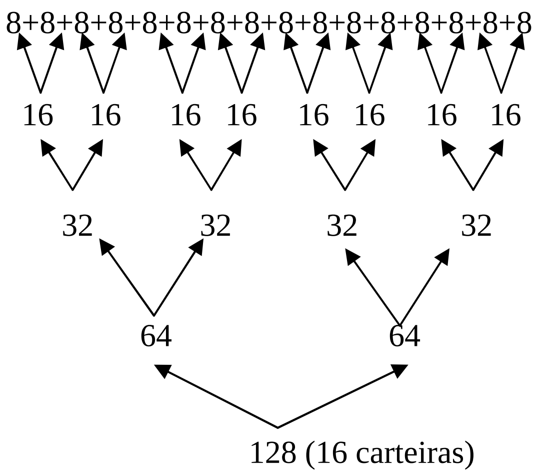
- 80 cromos são 10 carteiras de 8, ou seja, 80:8=10 porque 10x8=80
- 18 cromos repartidos igualmente por 6 crianças, dá 3 cromos a cada uma, ou seja, 18:6=3 porque 3x6=18
- 60 cromos repartidos igualmente por 6 crianças, dá 10 cromos a cada uma, ou seja, 60:6=10 porque 10x6=60.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na resolução desta tarefa os alunos podem utilizar diferentes estratégias associadas às operações adição, subtracção ou multiplicação. As situações podem ser representadas através de simbologia relacionada com a divisão, escrevendo por exemplo 176:8 e 144:6 mas o algoritmo tradicional da divisão não é uma estratégia disponível nesta altura, uma vez que os alunos não o conhecem.

Apresentam-se detalhadamente alguns caminhos possíveis a seguir pelos alunos na resolução do primeiro problema da tarefa. Os procedimentos relacionados com as diferentes estratégias podem ser bastante variados. Se os alunos recorrerem a estratégias aditivas podem por exemplo usar procedimentos do tipo:

- Adicionam repetidamente 8 até perfazerem 176. Estas adições podem ser feitas sucessivamente: 8+8=16; 16+8=24; 24+8=32; … até 168+8=176
- Adicionam partindo do 8+8=16; 16+16=32; 32+32=64 usando sempre adições de dobros até alcançarem o 176. Usando este procedimento os alunos têm de arranjar uma maneira funcional de contar quantos grupos de 8 conseguem fazer. Uma maneira usual é fazer por partes até se aproximarem do 176, por exemplo, fazendo até 128, usando dobros de dobros, de modo a adicionarem mais rapidamente e depois adicionarem mais cautelosamente até perfazerem 176 cromos. O número de carteiras é identificado através da contagem dos grupos de 8 utilizados.



128 (16 carteiras) +32 (4 carteiras) =160

160 cromos (20 carteiras) +16 cromos (2 carteiras) são 176 cromos embalados em 22 carteiras de cromos. Logo é preciso comprar 22 carteiras para ter um total de 176 cromos.

Os alunos podem também recorrer a estratégias subtractivas, fazendo subtracções sucessivas:

– 176-8=168; 168-8=160; 160-8= 152; …; até 8-8=0 e contando depois quantas vezes subtraíram o 8, o que corresponde ao número de carteiras de 8 cromos que é preciso comprar para ter 176 cromos.

Outros alunos podem usar estratégias mistas, recorrendo à adição ou subtracção em conjunto com a multiplicação, não partindo do número de cromos de uma carteira mas de várias. Por exemplo:

– se uma carteira tem 8 cromos, 10 carteiras têm 80 cromos e 80+80 são 160 cromos ou seja, 20 carteiras. Depois adicionam uma a uma 160+8=168 e 168+8=176. A solução é construída a partir de 10+10+1+1=22 carteiras.
– se uma carteira tem 8 cromos, 10 carteiras têm 80 cromos
  176-80=96; 96-80=16; 16-8=8; 8-8=0. A solução é construída retirando sucessivamente quantidades de cromos cujo número de carteiras associado é fácil de usar, como, por exemplo, o 80 que é 10x8 e contando depois as carteiras de cromos retiradas ao total 10+10+1+1=22 carteiras.

As estratégias mais rápidas e eficazes surgem ligadas à multiplicação e ao conhecimento de alguns factos associados a múltiplos de 10 e à utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

– Uma carteira tem 8 cromos
  10 carteiras têm 80 cromos porque 10x8=80
  20 carteiras têm 160 cromos porque 20x8=2x10x8=160
  2 carteiras têm 16 cromos
  176=20x8+2x8 ou 176=22x8 então são necessárias 22 carteiras para ter 176 cromos.
– Uma carteira tem 8 cromos, então preciso de usar a tabuada do 8
  10x8=80
  20x8=2x (10x8) =2x80=160
  21x8=160+8=168
  22x8=168+8=176
  Então são necessárias 22 carteiras para ter 176 cromos.

No que diz respeito ao segundo problema da tarefa, repartir 144 cromos por 6 crianças, os procedimentos possíveis de usar pelos alunos são semelhantes aos já ilustrados. No entanto, considerando o sentido da divisão envolvido, sentido de partilha, as estratégias associadas a este contexto que podem surgir, mais naturalmente, são as que recorrem à operação inversa, ou seja, à multiplicação. Neste caso os alunos fazem tentativas de, através da multiplicação, se aproximarem o mais possível do número envolvido. Assim, surgem estratégias semelhantes às duas últimas ilustradas mas, em vez de usarem múltiplos de 8, usam múltiplos de 6.

Calcular em cadeia

20x5=100 100:5=20 100:20=5 25x10=250 250:25=10 250:10=25	24:4 =6 48:4 =12 48:8 =6 96:16 =6 96:8 =12	100:10 =10 100:20=5 200:20 =10 200:40 =5 400: 20 =20

64:8 =8 64:4 =16 64:16 =4 128:16=8 128:8=16	24:2=12 24x0,5=12 36:2=18 36x0,5=18 48x0,5=24 48:2=24	2x10=20 10:0,5=20 2x25=50 25:0,5=50 2x43=86 43:0,5=86