Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de teste de avaliação [novembro – 2021]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

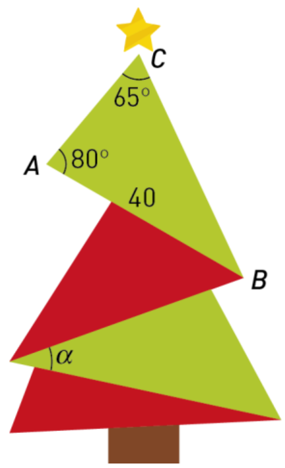
1. Sejam a e b dois números reais tais que:

$$a=\cos 0+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3} \qquad \text{e} \qquad b=\cos\left(0+\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Podes concluir que:

(A) $a=b$ **(B)** $a+b=0$ **(C)** $a=2b$ **(D)** $a-b=1$

2. "Trigonometria na árvore de Natal".



2.1. No triângulo [ABC] representado na figura, tem-se:

- $A=80^\circ$
- $C=65^\circ$
- $\overline{AB}=40$

Determina o perímetro do triângulo [ABC].

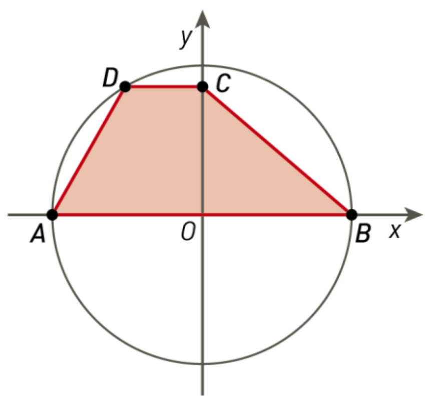
Apresenta o resultado arredondado às décimas.

2.2. Na figura está assinalada a amplitude α, em radianos, de um ângulo agudo de um dos triângulos.

Sabe-se que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}$, com $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Determina o valor exato de $\sin\left(-\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)+\tan(\alpha-3\pi)$.

3. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, uma circunferência e um trapézio [$ABCD$]. Sabe-se que:



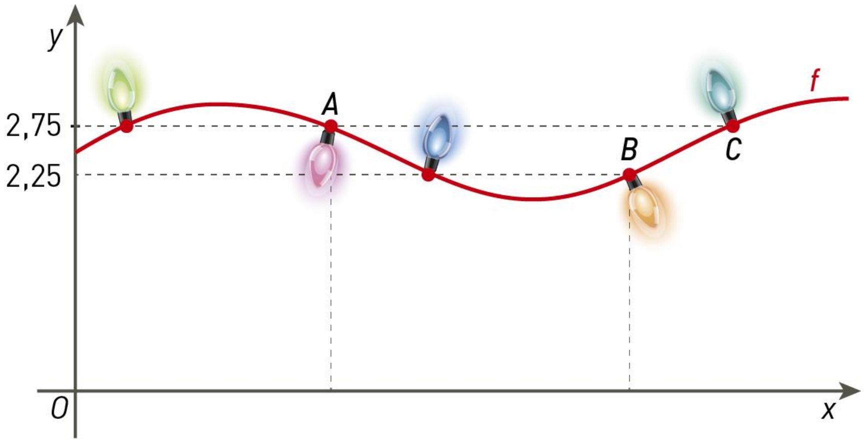
- a circunferência tem raio 1 e centro em O;
- o ângulo DOA tem amplitude $\frac{\pi}{3}$ radianos
- o ponto A tem abcissa –1;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy.

Qual é a medida da área do trapézio [$ABCD$]?

(A) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ **(B)** $\frac{5+\sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **(D)** $\frac{4+\sqrt{3}}{8}$

4. Na entrada de uma escola foi instalada uma iluminação de Natal.

As lâmpadas coloridas foram penduradas num fio que é representado na figura pelo gráfico da função *f* definida por $f(x) = 2,5 + 0,5\sin x$.



Tem atenção à figura e determina:

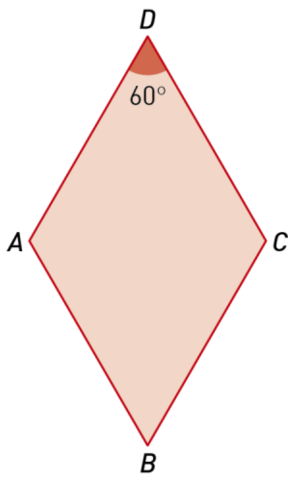
4.1. a diferença entre as abcissas dos pontos *C* e *A*;

4.2. a abcissa do ponto *B*.

5. O número de soluções da equação $3+5\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$ no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$ é:

(A) 3 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

6. Na figura está representado um losango [*ABCD*].



Sabe-se que:

- o perímetro do losango é 16;
- a amplitude do ângulo *ADC* é 60°

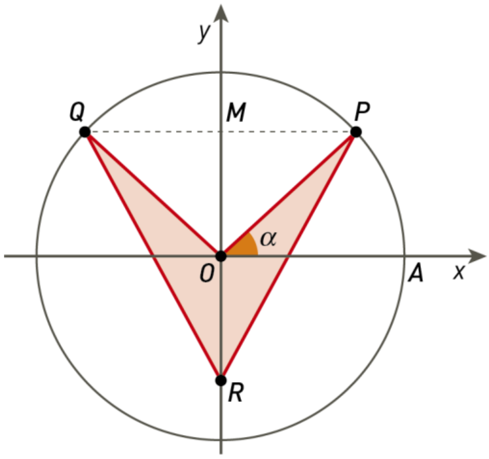
Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$?

(A) -2 **(B)** 16 **(C)** -8 **(D)** $-8\sqrt{3}$

7. Na figura, em referencial o.n. Oxy, está representada uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- os pontos P e Q são simétricos em relação ao eixo Oy e pertencem à circunferência;
- M é o ponto médio de $[PQ]$;
- R e M são simétricos em relação ao eixo Ox;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

7.1. Seja k um número real, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $f(k) = \frac{3}{8}$.

Determina o valor de $(\sin(k) + \cos(k))^2$.

7.2. Resolve, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a equação $\tan(x)\, f(x) = \frac{3}{4}$.

7.3. Mostra que a área da região sombreada da figura é dada por $f(\alpha)$.

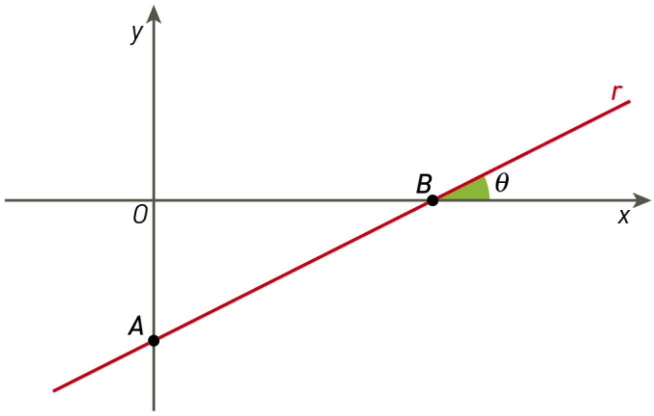
7.4. Sabe-se que $f(\alpha)$ representa a área da região sombreada da figura e é máxima quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina para que valores de α a medida da área da região sombreada é 80% da medida da área máxima.

Na tua resposta deves:

- Reproduzir, num referencial, o gráfico da função f que visualizas na calculadora, no respetivo domínio.
- Assinalar o(s) ponto(s) do gráfico relevante(s) para a resposta.
- Apresentar a(s) solução(ões) arredondada(s) às centésimas.

8. Na figura, num referencial o.n. *Oxy*, está representada uma reta *r*.



Sabe-se que:

- a reta *r* é definida por uma equação do tipo $y=\frac{1}{2}x+b,\ b<0$;
- θ representa a inclinação da reta *r*;
- o ponto *A* é interseção de *r* com o eixo *Oy*;
- o ponto *B* é a interseção de *r* com o eixo *Ox*.

Mostra que $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=b^2$.

FIM

Cotações														Total
Questões	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**7.4.**	**8.**	
Pontos	12	18	18	12	18	15	12	12	18	15	18	18	14	**200**

1. $a=\cos 0+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=1$

$b=\cos\left(0+\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\pi=-1$

Resposta: **(B)** $a+b=0$

2.

2.1. Por aplicação da lei dos senos:

$$\frac{\sin 65^\circ}{40}=\frac{\sin 35^\circ}{\overline{AC}}=\frac{\sin 80^\circ}{\overline{BC}}$$

Daqui resulta:

$\overline{AC}=\frac{40\sin 35^\circ}{\sin 65^\circ}$ e $\overline{BC}=\frac{40\sin 80^\circ}{\sin 65^\circ}$

Seja P o perímetro do triângulo.

$$P=40+\frac{40\sin 35^\circ}{\sin 65^\circ}+\frac{40\sin 80^\circ}{\sin 65^\circ}\approx 108,77947$$

Resposta: $108,8$

Alternativa à aplicação direta da lei dos senos.

Sugestão:

- Interpretar a **figura 1** e determinar $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$ (por esta ordem).
- Interpretar a **figura 2** e determinar $\overline{CE}$ e $\overline{BC}$ (por esta ordem).

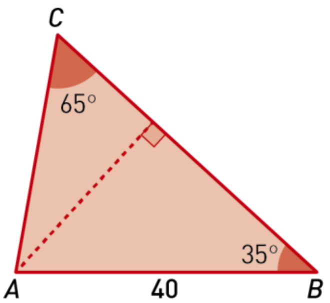


Figura 1

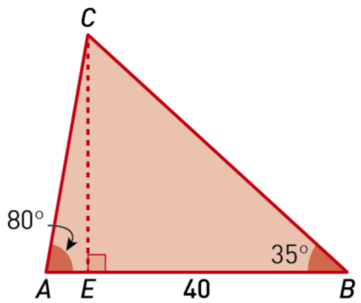


Figura 2

- Calcular o perímetro que é dado por: $40+\overline{AC}+\overline{BC}$

2.2. Sabe-se que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{3}$.

Então, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, com $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Simplificando o que é pedido, tem-se:

$$\sin\left(-\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)+\tan(\alpha-3\pi)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\tan\alpha=-\cos\alpha+\tan\alpha \quad \textbf{(1)}$$

Sabe-se que: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Então: $\frac{1}{9}+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Como $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, então $\tan\alpha=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Substituindo em **(1)**: $-\cos\alpha+\tan\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{5\sqrt{2}}{12}$

Resposta: $-\frac{5\sqrt{2}}{12}$

3. Medida da área do trapézio [*ABCD*]:

$$\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\times\overline{OC}=\frac{2+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{8}$$

Resposta: (A) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

4.

4.1. As abcissas dos pontos *A* e *C* são soluções da equação $f(x)=2,75$.

$$f(x)=2{,}75 \Leftrightarrow 2{,}5+0{,}5\sin x=2{,}75 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Considerando as soluções positivas, por ordem crescente, as abcissas de A e de C, são, respetivamente, a segunda e a terceira soluções.

Assim:

Abcissa do ponto A: $\frac{5\pi}{6}$

Abcissa do ponto C: $\frac{13\pi}{6}$

A diferença entre as abcissas de C e de A é: $\frac{13\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}=\frac{8\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$

Resposta: $\frac{4\pi}{3}$

4.2. A abcissa do ponto B é solução da equação $f(x)=2{,}25$.

$$f(x)=2{,}25 \Leftrightarrow 2{,}5+0{,}5\sin x=2{,}25 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Considerando as soluções positivas, a abcissa do ponto B é a segunda solução:

A abcissa do ponto B é $\frac{11\pi}{6}$.

Resposta: $\frac{11\pi}{6}$

5. $3+5\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 3+5\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{3}{5}$

A equação $\sin x=-\frac{3}{5}$ no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$ tem duas soluções: uma no intervalo $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$ e outra no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.

Resposta: **(D)** 2

6. A amplitude, em graus, do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ é dada por:

$\frac{360-2\times 60}{2}$, ou seja, 120°.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\cos\left(120^\circ\right)=4\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-8$$

Resposta: **(C)** -8

7.

7.1. $f\left(k\right)=\frac{3}{8}\Leftrightarrow\sin\left(k\right)\cos\left(k\right)=\frac{3}{8}$

$$\left(\sin\left(k\right)+\cos\left(k\right)\right)^2=\sin^2\left(k\right)+\cos^2\left(k\right)+2\sin\left(k\right)\cos\left(k\right)=1+2\times\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

Resposta: $\frac{7}{4}$

7.2. $\tan\left(x\right)f\left(x\right)=\frac{3}{4}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow\frac{\sin\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}\times\sin\left(x\right)\cos\left(x\right)=\frac{3}{4}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\left(x\right)=\frac{3}{4}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow\sin\left(x\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

Resposta: Conjunto-solução: $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

7.3. $f\left(\alpha\right)=\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)$

A área sombreada é dada pela diferença entre a área do triângulo [PQR] e a área do triângulo [PQO].

Área do triângulo [PQR]: $\frac{\overline{PQ}\times\overline{RM}}{2}=\frac{2\cos\left(\alpha\right)\times 2\sin\left(\alpha\right)}{2}=2\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)$

Área do triângulo [PQO]: $\frac{\overline{PQ}\times\overline{OM}}{2}=\frac{2\cos\left(\alpha\right)\sin\left(\alpha\right)}{2}=\cos\left(\alpha\right)\sin\left(\alpha\right)$

Área da região sombreada: $2\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)-\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)=\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)$

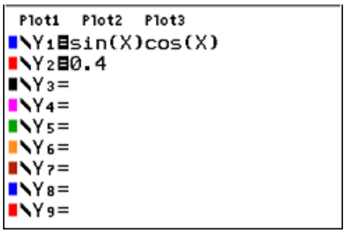
Conclui-se que a área da região sombreada é dada por $f\left(\alpha\right)$.

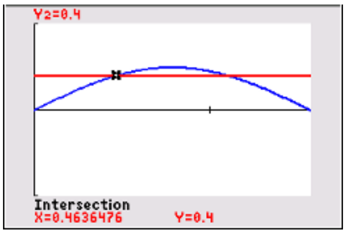
7.4. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

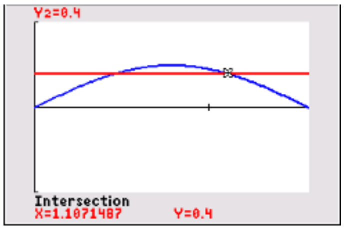
A medida da área máxima é $\frac{1}{2}$.

80% de $\frac{1}{2}$ é $0,8\times\frac{1}{2}$, ou seja, 0,4.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora basta resolver graficamente a equação $f(x)=0,4$.







Resposta: $\alpha=0,46$; $\alpha=1,11$

8. $y=\frac{1}{2}x+b,\ b<0$

As coordenadas do ponto A são $(0,b)$.

A abcissa do ponto B é x tal que $0=\frac{1}{2}x+b$.

$0=\frac{1}{2}x+b \Leftrightarrow x=-2b$

As coordenadas do ponto B são $(-2b,0)$.

$\overrightarrow{AO}=O-A=(0,b)$ e $\overrightarrow{AB}=B-A=(-2b,-b)$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(0,-b)\cdot(-2b,-b)=0+b^2=b^2$

Resposta: $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=b^2$