

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n - 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Uma loja que vende artigos de Carnaval tem para expor x fatos de princesas, y fatos de super-heróis e z fatos de animais, todos diferentes entre si.

Considerando quaisquer valores naturais de x, y e z , superiores a 1, de quantos modos pode o gerente da loja expor todos os fatos referidos, sendo que se pretende que os fatos de princesas fiquem todos juntos e os de super-heróis também?

- (A) $x!y!z!$ (B) $x!y!z!2!$ (C) $x!y!(z+2)!$ (D) $x!y!z!3!$

2. Num estudo realizado numa determinada escola, verificou-se que 10% dos alunos têm alergias alimentares e, destes, $\frac{3}{5}$ são do sexo masculino. De entre os alunos que não têm alergias alimentares, 7 em cada 10 são do sexo feminino. O Gonçalo é aluno dessa escola. Calcule a probabilidade de o Gonçalo ser um aluno com alergias alimentares.

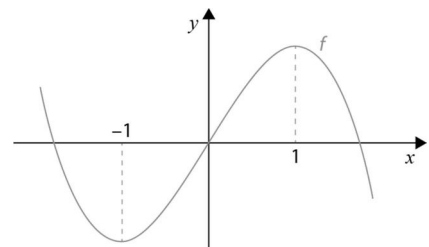
Apresente a sua resposta sob a forma de fração irredutível.

3. Acerca de uma determinada linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a diferença entre o terceiro termo e o segundo termo é igual a 77. Qual é o maior elemento dessa linha?

- (A) 3003 (B) 3432 (C) 5005 (D) 6435

4. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy , o gráfico de uma função polinomial f de grau 3.

Tal como a figura sugere, a função f tem um mínimo relativo para $x = -1$ e tem um máximo relativo para $x = 1$. A origem do referencial é ponto de inflexão do gráfico de f .



Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f , respetivamente.

Qual é o conjunto-solução da condição $\frac{f'(x)}{f''(x)} \geq 0$?

- (A) $[-1,0] \cup [1, +\infty[$ (B) $[-1,0[\cup [1, +\infty[$ (C) $]-\infty, -1] \cup [0,1]$ (D) $]-\infty, -1] \cup]0,1]$

5. De uma função f , sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x - 1) = 0$. De uma função g , de domínio \mathbb{R}^+ , sabe-se que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao seu gráfico.

O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + f(x) + 2x \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{g(x)}$ é:

- (A) -1 (B) 1 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

6. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \frac{x e^x}{2}$.

6.1. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, mostre que existe, pelo menos, um ponto cuja abscissa pertença ao intervalo $]0,1[$ e no qual a reta tangente ao gráfico da função f nesse ponto seja perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares.

6.2. Considere, num referencial o.n. Oxy , o gráfico da função f e o gráfico da função g definida por $g(x) = \ln(x + 2) + 4$.

Sabe-se que:

- A é o ponto de interseção do gráfico da função f com o gráfico da função g , de abscissa positiva;
- B é o ponto de interseção do gráfico da função g com o eixo das ordenadas;
- O é a origem do referencial.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[OAB]$.

Na sua resposta deve:

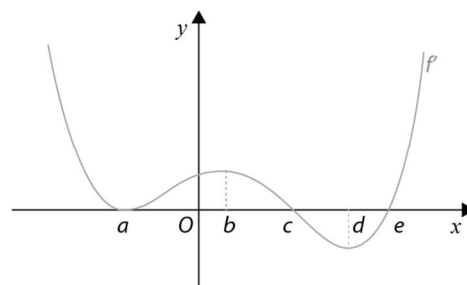
- reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos O, A e B e representar o triângulo $[OAB]$;
- indicar a ordenada do ponto B , com arredondamento às centésimas;
- indicar as coordenadas do ponto A , com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

7. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} .

Na figura ao lado está representado o gráfico de f' , primeira derivada da função f .

Tal como a figura sugere, a função f' tem:

- um mínimo relativo para $x = a$ e para $x = d$;
- um máximo relativo para $x = b$;
- três zeros: a, c e e .



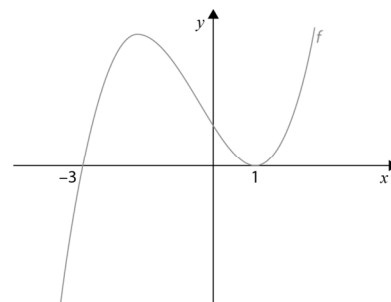
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) f admite três extremos relativos.
- (B) O gráfico de f admite três pontos de inflexão.
- (C) A reta tangente ao gráfico de f com declive máximo é a reta tangente em $x = b$.
- (D) O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, a]$.

8. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy , o gráfico de uma função polinomial f de grau 3.

Sabe-se que:

- -3 e 1 são os únicos zeros da função f ;
- a função f tem um mínimo relativo em $x = 1$;
- g' , primeira derivada de uma função g , tem domínio \mathbb{R} e é definida por $g'(x) = f(x) \times (x^2 + 1)$.



Considere as seguintes afirmações.

- A função g tem dois extremos relativos.
- O gráfico de g' não admite assíntotas verticais.
- $g''(1) = 0$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

9. Para cada número real k , considere a função f , de domínio $[-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - 2\cos x}{\sin(x^2)} & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ k & \text{se } x = 0 \\ \frac{2x}{2e^x - 2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

9.1. Determine o valor de k para o qual a função f é contínua em $x = 0$.

9.2. Estude o gráfico da função f quanto à existência de assíntotas não verticais, e, caso existam, escreva as suas equações.

9.3. Em $[-\frac{\pi}{2}, 0[$, considere a função h definida por $h(x) = f(x) \times \frac{\sin(x^2)}{2} \times \sin x$.

Estude a função h quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

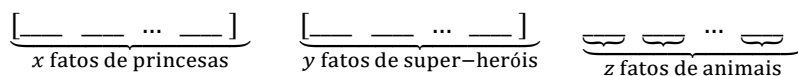
FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.	3.	4.	5.	6.1.	6.2.	7.	8.	9.1.	9.2.	9.3.	Total
8	20	8	8	8	25	25	8	20	20	25	25	200

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (C)



Existem $x!$ formas de ordenar os x fatos de princesas. Por cada uma destas formas, existem $y!$ maneiras de ordenar os y fatos de super-heróis.

Por cada uma das formas de ordenar os fatos de princesas e de super-heróis entre si, existem $(z + 2)!$ maneiras de permutar os z fatos de animais entre si e também com os dois blocos dos fatos de princesas e dos fatos de super-heróis.

Uma resposta é, então, $x! \times y! \times (z + 2)!$.

2. Sejam A e M os acontecimentos:

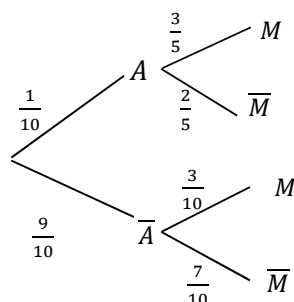
A : “o aluno tem alergias alimentares”

M : “o aluno é do sexo masculino”

Sabe-se que:

- $P(A) = \frac{1}{10}$
- $P(M|A) = \frac{3}{5}$
- $P(\bar{M}|\bar{A}) = \frac{7}{10}$

Pretende-se determinar o valor de $P(A|M)$:



$$P(A \cap M) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{50}$$

$$P(A \cap \bar{M}) = \frac{1}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{25}$$

$$P(\bar{A} \cap M) = \frac{9}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{27}{100}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{M}) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{100}$$

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{3}{50} + \frac{27}{100}} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{33}{100}} = \frac{2}{11}$$

3. Opção (B)

Seja n a linha do triângulo de Pascal, da qual se sabe que a diferença entre o terceiro termo e o segundo termo é igual a 77.

Assim:

$$\begin{aligned}
 {}^nC_2 - {}^nC_1 = 77 &\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = 77 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1)}{2} - n = 77 \\
 &\Leftrightarrow n^2 - n - 2n - 154 = 0 \\
 &\Leftrightarrow n^2 - 3n - 154 = 0 \\
 &\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-154)}}{2 \times 1} \\
 &\Leftrightarrow n = 14 \vee n = -11 \notin \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

O maior elemento da linha é o elemento central. Assim, o maior elemento da linha $n = 14$ é ${}^{14}C_7 = 3432$.

4. Opção (B)

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+	+	+	0	-
Sinal de f''	+	+	+	0	-	-	-
Sinal de $\frac{f'}{f''}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

$$\frac{f'(x)}{f''(x)} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0 \vee x \geq 1$$

$$C. S. = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$$

5. Opção (A)

Sabe-se que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g , logo $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pm\infty$.

Sabe-se, também, que a reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$. Logo, concluímos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 1$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + f(x) + 2x \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{g(x)} = \\
 &= -2 + 1 - \frac{5}{\pm\infty} = \\
 &= -2 + 1 - 0 = \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

6.

6.1. $f'(x) = \frac{1}{2}(xe^x)' = \frac{1}{2}(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{2}(1 + x)$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

• f' é uma função contínua, por se tratar do produto de duas funções contínuas. Em particular, f' é contínua em $[0, 1]$.

• $f'(0) = \frac{e^0}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2} < 1$

$f'(1) = \frac{e^1}{2}(1 + 1) = e > 1$

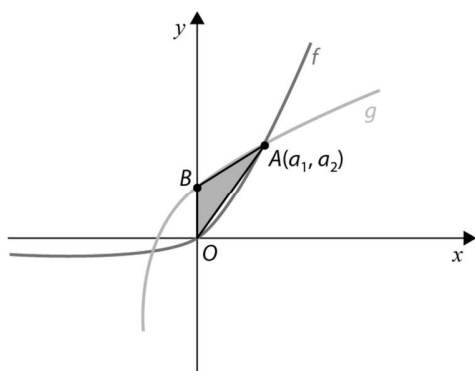
$f'(0) < 1 < f'(1)$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists c \in]0, 1[: f'(c) = 1$, isto é, existe, pelo menos, um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 1[$, no qual a reta tangente ao gráfico da função f nesse ponto tem declive igual a 1, ou seja, é perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares ($y = -x$).

6.2. $f(x) = \frac{xe^x}{2}$ $g(x) = \ln(x + 2) + 4$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g =]-2, +\infty[$



$B(0, b)$

$b \approx 4,69$

$A(a_1, a_2)$

$a_1 \approx 1,79$

$a_2 \approx 5,33$

$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times \text{abscissa de } A}{2} \approx \frac{4,69 \times 1,79}{2} \approx 4,2 \text{ u. a.}$

7. Opção (B)

A partir da representação do gráfico de f' , conseguimos obter as informações seguintes:

x		a		c		e	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	+	0	-	0	+
Varição de f	↗		↗	Máx.	↘	mín.	↗

Daqui, concluímos que f admite dois extremos relativos. Logo, a opção (A) é falsa.

x	$-\infty$	a		b		d	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	+	0	-	0	+
Variação de f'	↘	mín.	↗	Máx.	↘	mín.	↗

x		a		b		d	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	∩	P.I.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

Daqui, concluímos que o gráfico de f admite três pontos de inflexão. Logo, a afirmação (B) é verdadeira.

Em $]-\infty, a]$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. Logo, a opção (D) é falsa.

Apesar de $f'(b)$ ser máximo, não é máximo absoluto, como se pode observar pela representação gráfica de f' , logo a afirmação (C) é falsa.

8. Estudemos a monotonia e a existência de extremos da função g na tabela abaixo:

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
Sinal de f	-	0	+	0	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
Sinal de g'	-	0	+	0	+
Variação de g	↘	mín.	↗		↗

Concluímos, assim, que a função g tem apenas um extremo relativo, logo a afirmação I é falsa.

A função g' é contínua em \mathbb{R} , por se tratar do produto de duas funções contínuas (f é uma função polinomial e $x \mapsto x^2 + 1$ também é uma função polinomial).

Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais. A afirmação II é verdadeira.

Determinemos, agora, o valor de $g''(1)$.

$$g''(x) = f'(x) \times (x^2 + 1) + f(x) \times 2x$$

$$g''(1) = f'(1) \times (1^2 + 1) + f(1) \times 2 = 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0$$

Sabemos que $f'(1) = 0$, pois a reta tangente ao gráfico de f é uma reta horizontal, isto é, tem declive 0. Concluímos, assim, que a afirmação III é verdadeira.

9.

9.1. f é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-2\cos x}{\sin(x^2)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1-\cos x)}{\sin(x^2)} = \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{\sin(x^2)(1+\cos x)} = \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+\cos x} = \\
&= 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} \times \frac{1}{1+1} = \\
&= 2 \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^2)}{x^2}} \times \frac{1}{2} =
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $x^2 = y$: se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}} = \\
&= \frac{1^2}{1} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{2e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{2(e^x - 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \\
&= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}} = \\
&= \frac{1}{1} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\bullet f(0) = k$$

Logo, $k = 1$.

9.2. Como o domínio de f é limitado inferiormente, só faz sentido procurar assíntota não vertical quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x(e^x - 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = \\
&= \frac{1}{+\infty - 1} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{1}{+\infty - 0} = \\
 &= \frac{1}{+\infty} = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{9.3.} \quad h(x) &= f(x) \times \text{sen}(x^2) \times \frac{\text{sen}x}{2} = \\
 &= \frac{2-2\cos x}{\text{sen}(x^2)} \times \text{sen}(x^2) \times \frac{\text{sen}x}{2} = \\
 &= (1 - \cos x)\text{sen}x
 \end{aligned}$$

$$D_h = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= (1 - \cos x)' \text{sen}x + (1 - \cos x)(\text{sen}x)' = \\
 &= \text{sen}x \text{sen}x + (1 - \cos x)\cos x = \\
 &= \text{sen}^2 x + \cos x - \cos^2 x = \\
 &= \cos x - (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = \\
 &= \cos x - \cos(2x)
 \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0$$

$$\cos x - \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \vee x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x - 2x = 2k\pi \vee x + 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ $h'(x) = 0$ é uma equação impossível.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0
Sinal de h'	+	+	n. d.
Varição de g	mín.	↗	n. d.

Cálculos auxiliares

$$h'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi) = 0 + 1 = 1 > 0$$

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (1 - 0) \times (-1) = -1$$

h é estritamente crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e -1 é mínimo relativo para $x = -\frac{\pi}{2}$.