Teste de Matemática A

2018 / 2019

Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1 + Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

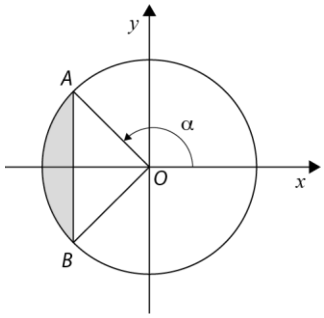
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:



- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto B está no terceiro quadrante, pertence à circunferência e é tal que AB é perpendicular a Ox;
- o ângulo de amplitude α tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

1.1. A área representada a sombreado é dada, em função de α, por:

(A) $2\pi - 2\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

(B) $\pi - \alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

(C) $2\pi - 2\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

(D) $\pi - \alpha + \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

1.2. Para um certo valor de α, sabe-se que:

$$30\cos(2019\pi + \alpha) = 32\operatorname{tg}(-\pi - \alpha)$$

Determine, para esse valor de α, o valor exato das coordenadas do ponto A.

2. Admita que o tempo, em horas, que decorre desde o nascer ao pôr do Sol, no dia de ordem n de um determinado ano comum, numa determinada região, é bem modelado por uma função do tipo:

$$f(n) = 12{,}166 + 2{,}717\operatorname{sen}(0{,}017n + a), \text{ com } n \in \{1,2,3,\dots,365\} \text{ e com } a \in \left]-\pi, \pi\right[$$

Admita ainda que, no maior dia do ano (21 de junho), o tempo que decorre desde o nascer ao pôr do Sol é superior em $5{,}433$ horas ao tempo que decorre desde o nascer ao pôr do Sol no menor dia do ano (21 de dezembro).

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a, sabendo que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

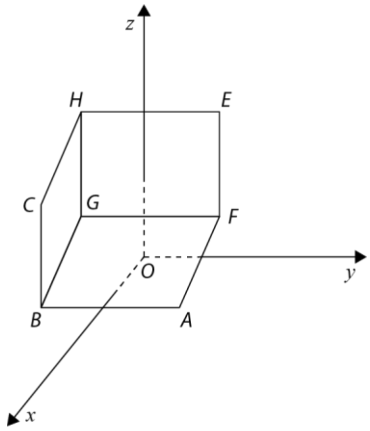
Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de a arredondado às milésimas.

3. Sabe-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

Mostre que a sucessão definida por $v_n = 10^{-3u_n}$ é uma progressão geométrica e indique a razão.

4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto D não está representado na figura).



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,2,-3)$;
- o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(3,-6,2)$;
- a equação $-6x-2y+3z-30=0$ define o plano CHE.

4.1. Qual das opções seguintes pode definir o plano BGF?

(A) $3x-6y+2z=34$

(B) $3x-6y+2z=-19$

(C) $-6x-2y+3z=34$

(D) $-6x-2y+3z=-19$

4.2. Determine as coordenadas do ponto D (vértice do cubo, não representado na figura).

4.3. Determine uma equação vetorial da reta CH.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1	**1.2**	**2.**	**3.**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	
8	20	20	15	8	15	15	**101**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

5. Seja f a função definida por:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{ax}{4}\right), \text{ com } a \in [-2,2]$$

Sabe-se que o ponto de coordenadas $(-2,\ \pi)$ pertence ao gráfico da função f.

O valor de a é igual a:

(A) $-\sqrt{3}$

(B) $-\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) $\sqrt{3}$

6. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{\sqrt{6-3x}} & \text{se} \quad x < 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \\ \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x} & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

6.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

6.2. Resolva, em $]2, +\infty[$, a condição $g(x) > \frac{2x+1}{x-1}$.

Estude a função g quanto à continuidade no ponto de abcissa $x = 2$.

6.3. Considere a função h, de domínio $]2, +\infty[$, definida por $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

Estude a função h quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

7. Na figura está a representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Considere a sucessão de termo geral $u_n = 2^n - 3^n$.

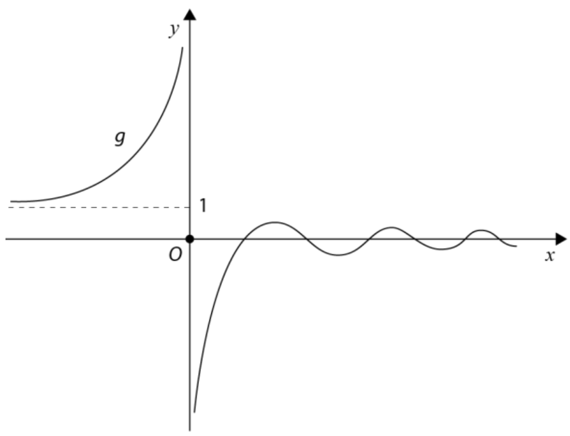
Indique o valor de $\lim_{n\to+\infty} g(u_n)$.

(A) $-\infty$

(B) 0

(C) 1

(D) $+\infty$



8. Sejam f e g duas funções reais, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x-1)=0$;
- a função g é definida por $g(x)=\frac{f(x)+\sqrt{x}}{x}$.

Prove que o gráfico de g tem uma única assíntota horizontal e indique uma sua equação.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
5.	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**7.**	**8.**	
8	8	20	20	20	8	15	**99**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Opção (D)

Sabemos que $A(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$. Assim:

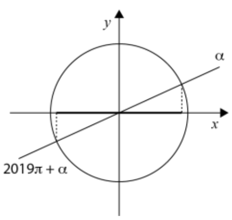
$A_{[OAB]} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha \times |\cos\alpha|}{2} = \operatorname{sen}\alpha(-\cos\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

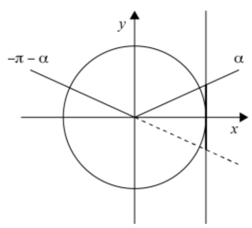
A área do setor circular de ângulo ao centro AOB e raio 1 é dada por $\frac{(2\pi - 2\alpha)\times 1^2}{2} = \pi - \alpha$.

Logo, a área representada a sombreado é dada, em função de α, por:

$$\pi - \alpha - (-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = \pi - \alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

1.2. $30\cos(2019\pi + \alpha) = 32\operatorname{tg}(-\pi - \alpha) \Leftrightarrow -30\cos\alpha = -32\operatorname{tg}\alpha$





$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{32}{30} \times \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - \frac{16}{15}\operatorname{sen}\alpha = 0$ (como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\cos\alpha \neq 0$)

$\Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \frac{16}{15}\operatorname{sen}\alpha = 0$

$\Leftrightarrow -15\operatorname{sen}^2\alpha - 16\operatorname{sen}\alpha + 15 = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\times(-15)\times 15}}{-30}$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{16 \pm 34}{-30}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\alpha = -\frac{5}{3}}_{\text{condição impossível}} \vee \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

Como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, então:

$\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$

Como $\alpha \in 2^{\text{o}}$ Q, então $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Assim, as coordenadas do ponto A são $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

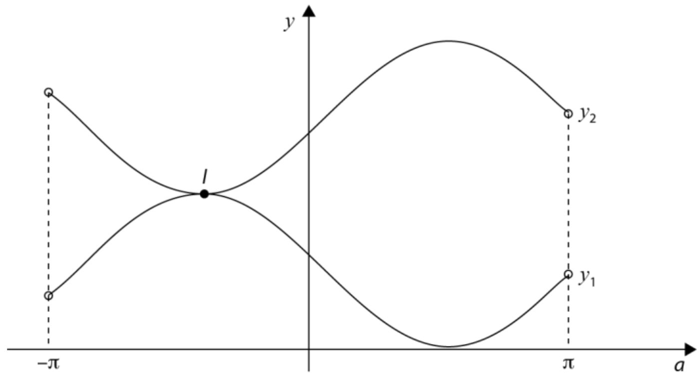
2. Comecemos por determinar quantos dias decorrem desde o início do ano até aos dias 21 de junho e 21 de dezembro:

- até ao dia 21 de junho decorrem 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 21 = 172 dias;
- até ao dia 21 de dezembro decorrem 365 – 10 = 355 dias.

Tem-se que $f(172) = f(355) + 5{,}433$, isto é:

$\underbrace{12{,}166 + 2{,}717\operatorname{sen}(0{,}017 \times 172 + a)}_{y_1} = \underbrace{17{,}599 + 2{,}717 \times \operatorname{sen}(0{,}017 \times 355 + a)}_{y_2}$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



$I(a,b)$

$a \approx -1{,}326$

3. Sabemos que $u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$.Tem-se que:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{10^{-3u_{n+1}}}{10^{-3u_n}} = 10^{-3u_{n+1}+3u_n} =$$

$$= 10^{-3(u_n+2)+3u_n} =$$

$$= 10^{-3u_n-6+3u_n} =$$

$$= 10^{-6}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 10^{-6} v_n$, ou seja, (v_n) é uma progressão geométrica de razão igual a 0,000 001.

4.

4.1. Opção (D)

O plano BGF é paralelo ao plano CHE, logo o vetor de coordenadas $(-6,-2,3)$ é um vetor normal ao plano BGF. Assim, pode ser definido por:

$$-6(x-1) - 2(y-2) + 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 - 2y + 4 + 3z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x - 2y + 3z = -19$$

4.2. D é o ponto de interseção da reta AD com o plano CHE.

Comecemos por definir vetorialmente a reta AD:

$$(x,y,z) = (1,2,-3) + k(-6,-2,3), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta AD é do tipo$(1-6k, 2-2k, -3+3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano CHE, obtemos:

$$-6(1-6k) - 2(2-2k) + 3(-3+3k) - 30 = 0 \Leftrightarrow -6 + 36k - 4 + 4k - 9 + 9k - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow 49k = 49$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

Para $k = 1$, obtemos o ponto de coordenadas $(1-6, 2-2, -3+3) = (-5,0,0)$.

Logo, $D(-5,0,0)$.

4.3. $B = A + \overrightarrow{AB} = (1,2,-3) + (3,-6,2) = (4,-4,-1)$

O plano BCH pode ser definido por:

$3(x-4) - 6(y+4) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 12 - 6y - 24 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 6y + 2z = 34$

A reta CH é a interseção dos planos BCH e CHE:

$$\begin{cases} 3x - 6y + 2z = 34 \\ -6x - 2y + 3z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6y - 2z + 34 \\ -2 \times 3x - 2y + 3z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ -2(6y - 2z + 34) - 2y + 3z = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ -12y + 4z - 68 - 2y + 3z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ -14y + 7z = 98 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ z = 2y + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6y - 2(2y + 14) + 34 \\ \overline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6y - 4y - 28 + 34 \\ \overline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y + 6 \\ \overline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y + 2 \\ z = 2y + 14 \end{cases}$$

Um ponto genérico da reta CH é do tipo $\left(2 + \frac{2}{3}y, y, 14 + 2y\right)$, com $y \in \mathbb{R}$.

Logo, uma equação vetorial de CH pode ser:

$$(x,y,z) = (2,0,14) + k\left(\frac{2}{3}, 1, 2\right), k \in \mathbb{R}$$

Caderno 2

5. Opção (C)

$$f(-2) = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \arccos\left(-\frac{2a}{4}\right) = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \arccos\left(-\frac{a}{2}\right) = \pi$$

$$\Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}$$

6.

6.1. Opção (C)

- Em $]-\infty, 2[$:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{6-3x}} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \ \wedge \ \underbrace{\sqrt{6-3x} \neq 0}_{\text{condição universal em }]-\infty,2[}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 2}_{2 \notin]-\infty,2[} \vee x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Em $]-\infty, 2[$, g admite um zero.

- Em $x = 2$:

  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

  2 é um zero de g.

- Em $]2, +\infty[$:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x^2-3x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \quad \text{(pois } x \in\,]2, +\infty[\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \ \wedge \ x(x-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 2}_{2 \notin]2,+\infty[} \ \wedge (\, x \neq 0 \ \wedge x \neq 1)$$

  g não admite zeros em $]2, +\infty[$.

6.2. Em $]2, +\infty[$:

$$g(x) > \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x} > \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x^2-3x+2)} > \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)} - \frac{2x+1}{x-1} > 0$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{x \neq 2} \frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{2x+1}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-x(2x+1)}{x(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-2x^2-x}{x^2-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - 2x^2 - x > 0 \text{ (pois } x(x-1) > 0, \forall x \in\,]2, +\infty[)$$

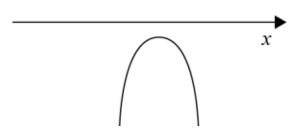
$$\Leftrightarrow -2x^2 - 2 > 0 \text{ condição impossível}$$

$\text{C.S.} = \emptyset$

Cálculo auxiliar

$-2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = -1$



6.3. g é contínua em $x = 2$ se e só se existir $\lim_{x\to 2} g(x)$, isto é, $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = g(2)$.

- $$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{\sqrt{6-3x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{6-3x}}{6-3x} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{6-3x}}{-3(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)\sqrt{6-3x}}{-3} =$$

$$= \frac{4\times 0}{-3} =$$

$$= 0$$

- $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-2)}{x(x-2)(x-1)} =$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{0}{2\times 1} =$$

$$= 0$$

- $g(2) = 0$

Logo, g é contínua em $x = 2$.

6.4. $h(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}$

$D_h =]2, +\infty[$

Como o domínio de h é limitado inferiormente, só faz sentido procurar assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-4x^2+4x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}} =$$

$$= \frac{1-0+0}{1-0+0} =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [h(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+2x-x^3+4x^2-4x}{x^2-4x+4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}} =$$

$$= \frac{1-0}{1-0+0} =$$

$$= 1$$

A reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando $x \to +\infty$.

7. Opção (C)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(2^n - 3^n) = \lim_{n\to+\infty}\left[2^n\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\right] =$$
$$= +\infty \times \left(1-(+\infty)\right) =$$
$$= +\infty \times (-\infty) =$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$$

8. Sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+1)\right)=0$, isto é, a reta de equação $y=-x+1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$.

Como o domínio de g é limitado inferiormente, só faz sentido procurar assíntota horizontal quando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} =$$
$$= -1 + \frac{1}{+\infty} =$$
$$= -1 + 0 =$$
$$= -1$$

Logo, a reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x\to+\infty$ e é a única.