www.esffranco.edu.pt
(2016/2017)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 11

3.º Período   24/05/17   Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: ___ , ___   O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

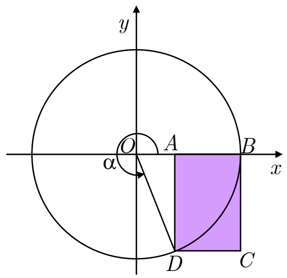
- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Considere, na figura ao lado, a circunferência trigonométrica e o retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa inferior a 1;
- o ponto B tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto C tem abcissa 1 e pertence ao quarto quadrante;
- o ponto D pertence à circunferência e tem a mesma abcissa de A;
- as retas AB e CD são paralelas;
- α é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\dot{O}D$;
- $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.



Qual das expressões seguintes dá a área do retângulo $[ABCD]$, em função de α?

(A) $\operatorname{sen}\alpha \times \operatorname{tg}\alpha$ **(B)** $\cos\alpha \times \operatorname{tg}\alpha$ **(C)** $\operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$ **(D)** $\cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$

2. Num referencial cartesiano do espaço, considere os vetores $\vec{u}(a,1,2)$ e $\vec{v}(-a,0,-1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes pode representar a amplitude do ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

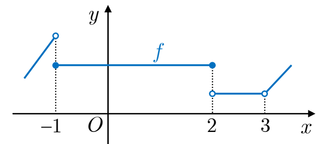
(A) $0°$ **(B)** $50°$ **(C)** $90°$ **(D)** $110°$

3. Considere a sucessão definida por $a_n = \begin{cases} 1-n^2 & \text{se } n \le 100 \\ \frac{3^{n+1}}{3^n+2^n} & \text{se } n > 100 \end{cases}$.

Sendo A o conjunto dos termos de (a_n), qual é o conjunto dos pontos aderentes a A?

(A) $A \cup \{3\}$ **(B)** $A \cup \{0\}$ **(C)** $A \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$ **(D)** $\mathbb{R} \setminus A$

4. No referencial o.n. xOy do lado, encontra-se parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.



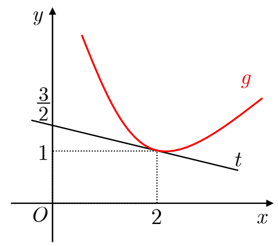
Qual é a afirmação falsa?

(A) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **(B)** Existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

(C) f é contínua em $[-1,2]$. **(D)** $f\big|_{[-1,2]}$ é uma função contínua.

5. Considere, no referencial o.n. xOy do lado:

- parte do gráfico da função g, diferenciável em $\mathbb{R}$;
- a reta t, tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(2,1)$ e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada $\frac{3}{2}$.



Qual é o valor de $g'(2)$?

(A) 0 **(B)** $-\frac{3}{4}$ **(C)** $-\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Após a disputa do Grande Prémio de Espanha de Fórmula 1 no dia 14 de maio de 2017, Sebastian Vettel continuou a comandar a classificação de pilotos.

Admita que a distância, em metros, percorrida pelo piloto da Ferrari, t segundos após entrar na reta da meta (durante a corrida), foi dada pela função definida por

$d(t) = -0{,}2t^3 + 6t^2 + 40t$, $t \in [0,12]$.

Usando processos analíticos, calcule e interprete:

1.1. a taxa média de variação de d no intervalo $[0,6]$;

1.2. a taxa de variação de d em $t = 10$.

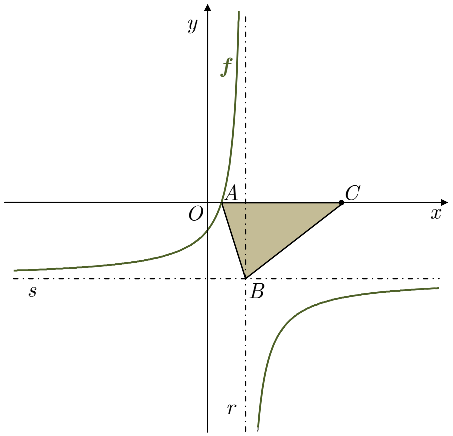
2. Na figura do lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo $[ABC]$ e parte do gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{3-8x}{4x-4}$$

Tal como a figura indica:

- a reta r é a assíntota vertical ao gráfico de f;
- a reta s é a assíntota horizontal ao gráfico de f;
- o ponto A pertence ao gráfico de f e ao eixo das abcissas;
- B é o ponto de interseção entre r e s;
- o ponto C pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa superior à de A.

Sabendo que a área do triângulo $[ABC]$ é 3, determine a abcissa de C.



3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2+5} & \text{se } x \le 2 \\ \dfrac{3x-6}{x^3-3x^2-4x+12} & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

Resolva os itens seguintes usando processos analíticos.

3.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 2$.

3.2. Mostre, indicando as equações respetivas, que o gráfico de f tem:

- uma assíntota vertical;
- uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$;
- uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$.

4. Dada a função polinomial definida por $f(x) = 4 - x^2$:

4.1. Mostre, aplicando a definição de derivada num ponto, que $f'(1) = -2$;

4.2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

5. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2} & \text{se } x < -3 \\ 2\cos(\pi x) & \text{se } x \ge -3 \end{cases}$, $k \neq 0$.

5.1. Sabendo que a função g é contínua, determine k, sem usar a calculadora.

5.2. No intervalo $[-2, 0]$, o gráfico de g interseta a reta de equação $y = 1{,}4$ num só ponto de abcissa inferior a -1.

Seja P a abcissa desse ponto.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine $\left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ (O é a origem de um referencial).

Na sua resposta, deve:

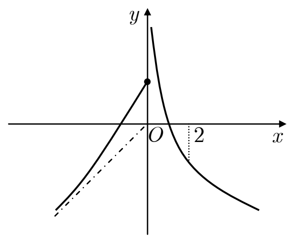
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) visualizado(s) e indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às milésimas;
- determinar o valor pedido, arredondado às décimas.

6. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ e tal que:

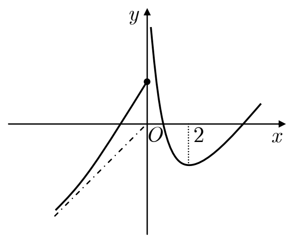
- $\lim_{x\to-\infty}[h(x) - x] = 0$;
- $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$;
- o declive da reta tangente em $x = 2$ é nulo.

Apenas uma das opções seguintes pode representar parte do gráfico da função h.

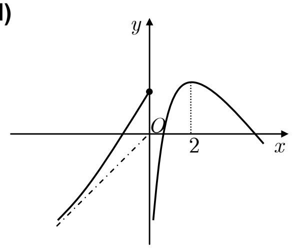
I)



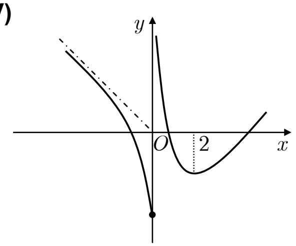
II)



III)



IV)



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar h.
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

7. Resolva, usando processos analíticos, o item **7.1.** ou o item **7.2.**.

7.1. Considere as funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$, e tais que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 4$;
- $g(x) = \left[f(x)+1\right]^2$.

Prove que o gráfico de g não admite assíntotas oblíquas.

7.2. Considere a função, diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $k(x) = \frac{5}{x^2}$.

Usando a definição de derivada, prove que $k'(a) = -\frac{10}{a^3} \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)	**1.**.......28 **1.1.**...14 **1.2.**...14	**2.**.......14	**3.**.......34 **3.1.**...14 **3.2.**...20	**4.**.......28 **4.1.**...14 **4.2.**...14	**5.**.......28 **5.1.**...14 **5.2.**...14	**6.**.......14	**7.**.......14

Formulário

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$