

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 11

2.º Período

17/03/17

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Considere, no referencial o.n. xOy da figura, a reta r .

Tal como sugere essa figura, a reta r :

- intersesta o eixo Ox no ponto de abcissa 1;
- intersesta o eixo Oy no ponto de ordenada $\sqrt{8}$;
- tem inclinação α .

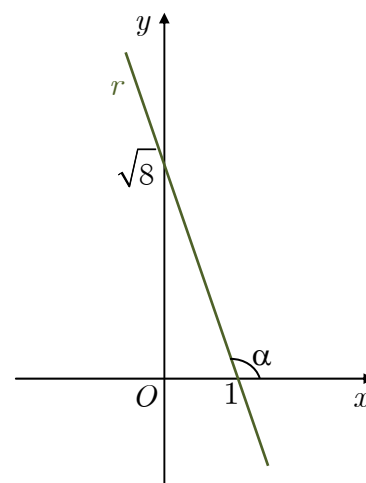
Qual é, em radianos, o valor de α ?

(A) $\pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

(B) $\pi - \arcsen\left(\frac{1}{3}\right)$

(C) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$

(D) $\arcsen\left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$



2. Num plano munido de um referencial o.n. $Oxyz$, considere as seguintes retas concorrentes:

$r: (x, y, z) = k(2, 3, -4), k \in \mathbb{R};$

$s: x = 0 \wedge y = 0.$

Qual das seguintes pode representar a equação de um plano que contém r e s ?

(A) $2x - 4z = 0$

(B) $2x + 4z = 3$

(C) $3x - 2y = 0$

(D) $3x + 2y = 4$

3. A recente companhia de teatro **34DeLitro** estima que o seu espetáculo foi visto por:

- 50 pessoas no primeiro dia;
- 80 pessoas no segundo dia;
- 110 pessoas no terceiro dia.



A continuar assim, pode afirmar-se que, após N dias, o número total de pessoas que viu o espetáculo dos **34DeLitro** é dado por:

- (A) $10N^2 + 35N$ (B) $10N^2 + 40N$ (C) $15N^2 + 35N$ (D) $15N^2 + 40N$

4. Considere a sucessão definida por $a_n = 5 - \frac{2}{n}$.

A partir de que ordem, inclusive, todos os termos de (a_n) pertencem a $V_{0,01}(5)$?

- (A) 201 (B) 301 (C) 401 (D) 501

5. O domínio de uma função racional f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Qual das seguintes expressões pode ser a de f ?

- (A) $\sqrt{x^2 - 1}$ (B) $\frac{x-1}{x^2-x}$ (C) $\frac{x}{x-1}$ (D) $\frac{x-1}{x}$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

- 1.1. Resolva, analiticamente, a condição $f(x) \geq \frac{2x}{x-2}$.

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

- 1.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$.

Sabe-se que a equação $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x}$ tem exatamente uma solução em $]0, 2]$.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essa solução.

Apresente a solução arredondada às centésimas. Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar o ponto relevante para responder à questão colocada.

2. O Amâncio e o Evaristo são pintores. O primeiro tem mais experiência pelo que sabe que bastam 5 horas para pintar um determinado salão; ainda chegou a perguntar ao colega (*ó Evaristo, percebes alguma coisa disto?*) mas ficou sem saber o número de horas que ele demora a pintar o salão.



Admita que o Evaristo demora t horas a pintar o dito salão.

- 2.1. Se ambos os pintores trabalharem simultaneamente, prove que a expressão do número de horas h necessárias para pintar o salão é dado por

$$h(t) = \frac{5t}{t+5}, t > 0.$$

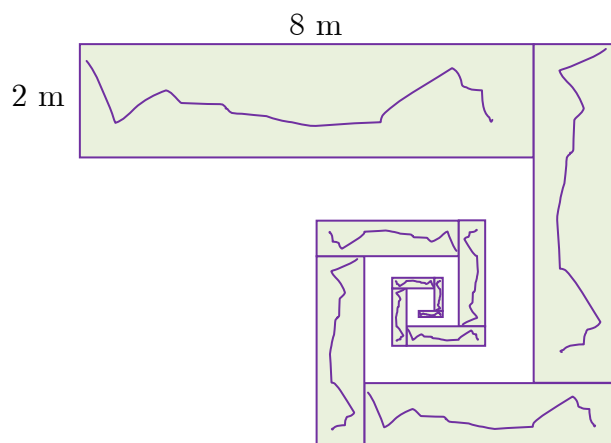
- 2.2. Usando processos analíticos, determine o valor de t se o Amâncio e o Evaristo pintarem o salão durante 3 horas e meia.

Apresente o resultado em horas e minutos.

- 2.3. Paralelamente, o Amâncio ficou encarregado de pintar, no chão do salão, o desenho artístico do lado, que consiste em infinitos retângulos semelhantes.

O retângulo maior tem 8 metros de comprimento e 2 metros de largura e, cada retângulo pintado a seguir, tem três quartos da área do anterior.

Calcule, em metros quadrados, a área total de todos os retângulos pintados desta maneira.



3. Usando processos exclusivamente analíticos, calcule, identificando, se existirem, as indeterminações encontradas:

3.1. $\lim \left[\frac{5^n + 2^{3n}}{8^{n+2} + 5^n} + \frac{n - 2 \cos n}{8n + 2 \sin n} \right];$

3.2. $\lim \left(\sqrt{9n^2 + 4n} - 3n \right).$

4. Considere a sucessão de termos positivos definida por $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 4}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4.1. Mostre que (a_n) é monótona decrescente.

4.2. Justifique que (a_n) é convergente e determine $\lim a_n$.

5. Resolva, usando processos analíticos, o item 5.1. ou o item 5.2..

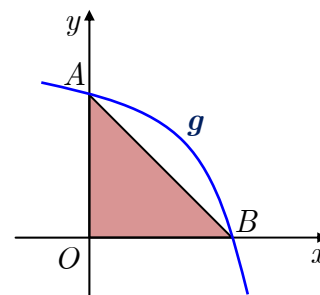
5.1. Considere a sucessão definida por $u_n = -n\sqrt{n}$.

Mostre, usando a definição, que $\lim u_n = -\infty$.

5.2. No referencial o.n. xOy do lado, estão representados:

- parte do gráfico da função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, definida por $g(x) = \frac{4x+a}{x-4}$, $a < 0$;
- o triângulo retângulo e isósceles $[ABO]$, sendo A o ponto do gráfico de g pertencente ao eixo Oy e B o ponto do gráfico de g pertencente ao eixo Ox .

Sabendo que a área do triângulo $[ABO]$ é $\frac{9}{32}$, determine o valor de a .



FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
--------------------------------	------------------------	---

Grupo II (160 pontos)	1.....36 1.1...20 1.2...16	2.....36 2.1...12 2.2...12 2.3...12	3.....40 3.1...20 3.2...20	4.....32 4.1....16 4.2....16	5.....16
----------------------------------	----------------------------------	--	----------------------------------	------------------------------------	----------

Formulário

Progressões

Soma dos N termos de uma progressão (u_n) de comprimento N :

Progressão aritmética: $\frac{N}{2}(u_1 + u_N)$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^N}{1-r}$