

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 11

2.º Período 10/02/17 Duração: 90 minutos
Nome: N.º:
Classificação: O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

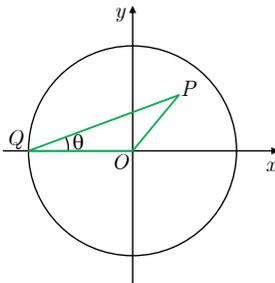
1. Considere, na figura ao lado, a circunferência trigonométrica e o triângulo $[OPQ]$.

Tal como essa figura sugere:

- o vértice P pertence ao primeiro ou ao segundo quadrante;
- o vértice Q é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo negativo Ox ;
- θ é a amplitude do ângulo OQP ($\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$).

Sabendo que $\widehat{QPO} = \frac{\pi}{6}$, qual é o valor de \overline{OP} em função de θ ?

- (A) $\frac{\text{sen}\theta}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}\text{sen}\theta}{2}$ (C) $2\text{sen}\theta$ (D) $\sqrt{3}\text{sen}\theta$



2. Dado um número real não nulo p , considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os seguintes planos:

$$\alpha : (p + 2)y - 8z = 0;$$

$$\beta : 2y + (p - 8)z = 0.$$

Indique o valor de p de modo que α e β sejam paralelos.

- (A) 6 (B) 8 (C) -4 (D) -2

3. Num plano munido de um referencial o.n. xOy , considere as retas r e s de equações, respetivamente, $8x + 9y = -2$ e $y = mx - 2$, $m \neq 0$.

Sabendo que r e s são perpendiculares, qual é o valor de m ?

- (A) $\frac{9}{8}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $-\frac{9}{2}$ (D) $-\frac{8}{9}$

4. Sobre a sucessão (u_n) definida por $u_n = 6 \times (-1)^n$, pode-se concluir que é:

- (A) monótona e não limitada. (B) não monótona e não limitada.
(C) monótona e limitada. (D) não monótona e limitada.

5. Três termos consecutivos de uma progressão geométrica são dados, para um determinado valor real de x , respetivamente, por $2x + 10$, $x + 5$ e 1 .

Qual é o valor de x ?

- (A) -3 (B) -2 (C) 3 (D) 4

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere, no intervalo $[0, \pi]$, os gráficos das funções f e g no referencial ao lado.

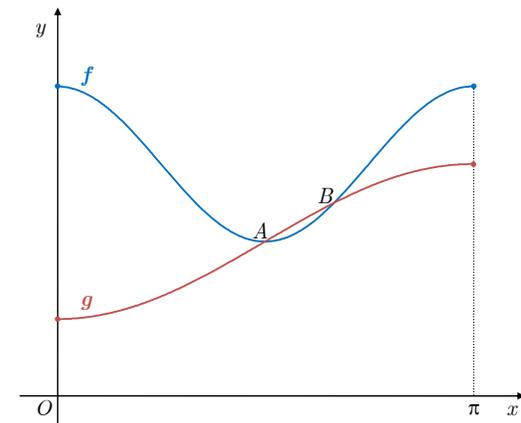
Sabe-se que:

$$f(x) = 4 - 2\text{sen}^2 x;$$

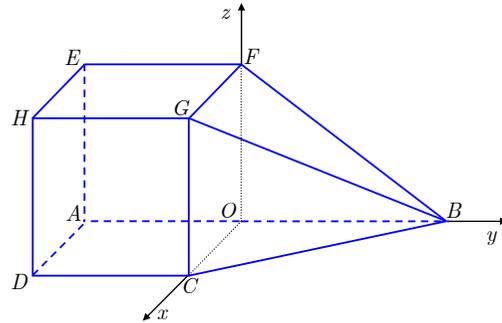
$$g(x) = 2 - \cos x.$$

Tal como é sugerido pela figura, os pontos A e B pertencem aos gráficos de ambas as funções.

Usando processos exclusivamente analíticos, determine as suas abcissas.



2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o sólido $[ABCDEFGH]$, que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular oblíqua.



Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(0, -3, 0)$;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy , o vértice C pertence ao semieixo positivo Ox e o vértice F pertence ao semieixo positivo Oz ;
- o plano BCF é definido pela equação $4x + 3y + 4z = 12$.

2.1. Determine um vetor normal ao plano ABG .

2.2. Seja T o ponto de tangência entre a superfície esférica de centro A e o plano BCF .

Determine as coordenadas do ponto T percorrendo os seguintes passos:

- escreva as equações paramétricas da reta r , que passa em A e é perpendicular ao plano BCF , em função de um parâmetro real k ;
- indique as coordenadas de um ponto genérico dessa reta r ;
- determine k (note que $T \in BCF$);
- indique as coordenadas de T .

3. Considere a sucessão de termos positivos definida por $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{1-2n}$.

Usando processos exclusivamente analíticos prove que:

3.1. (a_n) é limitada e indique o conjunto dos majorantes de (a_n) ;

Sugestão: comece por mostrar que (a_n) é monótona.

3.2. (a_n) é uma progressão geométrica e indique a razão.

4. O Bertílio pretende comprar uma boa bicicleta de estrada que custa 1000 euros, mas ele não tem esse dinheiro a pronto.

Na loja, propõem-no pagar a bicicleta em dois anos do seguinte modo: no primeiro mês, o Bertílio pagará 7 euros e, em cada mês seguinte, ele pagará mais 15% do que no mês anterior (durante os dois anos).

Calcule, em euros e arredondado às unidades, a quantia total que o Bertílio irá pagar pela bicicleta.



5. De uma progressão aritmética (b_n) , sabe-se que $b_3 = -2 \wedge b_{11} = 46$.

5.1. Mostre que $b_n = 6n - 20$.

5.2. Sabe-se que a soma dos primeiros n termos de (b_n) é igual a 6096.

Usando processos analíticos, determine n .

6. Resolva, usando processos analíticos, o item 6.1. ou o item 6.2.

6.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- o ponto $A(3, 4, 0)$;
- o ponto B pertencente ao plano yOz de ordenada 1 e cota positiva;
- o ângulo AOB de amplitude $\frac{\pi}{3}$.

Determine a cota do ponto B .

6.2. Considere a sucessão (c_n) , definida por $\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Prove, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 4 + \frac{1}{4^{n-1}}$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
--------------------------------------	------------------------	---

Grupo II (160 pontos)	1.....18	2.....39 2.1...18 2.2...21	3.....31 3.1...18 3.2...13	4.....18	5.....36 5.1...18 5.2...18	6.....18
--	----------	----------------------------------	----------------------------------	----------	----------------------------------	----------

Formulário

Progressões

Soma dos N termos de uma progressão (u_n) de comprimento N :

Progressão aritmética: $\frac{N}{2}(u_1 + u_N)$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^N}{1-r}$