# Novo Espaço – Matemática A 10.º ano

**Proposta de Teste** **[novembro/dezembro 2016]**


**Nome:** ______________________________________________

**Ano / Turma:** _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

## 1.ª Parte

**Para cada questão indica a opção que consideras correta.**

**1.** Qual das seguintes proposições é verdadeira?

**(A)** $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \ \sqrt[3]{x} = -x$

**(B)** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x$

**(C)** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$

**(D)** $\forall x \in \mathbb{R}^-, \quad \sqrt{x^2} = -x$

**2.** Considera a expressão $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ com $a > 0$.

A expressão dada pode ser representada na forma de potência de base a, sendo o expoente igual a:

**(A)** $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

**3.** Sejam $A(x)$ e $B(x)$ dois polinómios de grau 5 e grau 2, respetivamente.

Se $C(x) = \left(A(x) - B(x)\right)^2$, podes concluir que o grau do polinómio $C(x)$ é igual a:

**(A)** 10 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

**4.** Considera os polinómios $P(x) = 2x^4 - x^3 + kx + k^2, \quad k \in \mathbb{R}$.

O conjunto de valores de *k* para os quais $P(x)$ é divisível por $x+1$ é:

**(A)** $\{-1,1\}$ **(B)** $\mathbb{R}$ **(C)** $\{ \ \}$ **(D)** $-1$

**5.** Considera o polinómio $P(x) = (x-2)^n (x+3)^2$. Sabe-se que 2 é uma raiz de multiplicidade 3.

O polinómio quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $(x-2)^3$ é o polinómio:

**(A)** $x^2 + 9$ **(B)** $x + 3$ **(C)** $x^2 + x - 6$ **(D)** $x^2 + 6x + 9$

# 2.ª Parte

**Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.**

**1.** Considera os números reais *a* e *b* representados por: $a=\dfrac{\sqrt[3]{5}\times 2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{10}}$ e $b=\sqrt{8}-2^{\frac{1}{2}}$

**1.1.** Representa o número real *a* na forma de potência de base 10.

**1.2.** Mostra que $\dfrac{b}{\sqrt{3}+b}=\sqrt{6}-2$ .

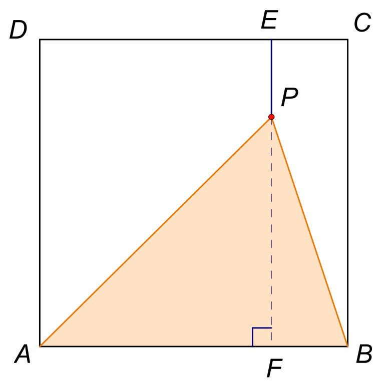
**2.** Considera o número real *k*, tal que $k=24^{\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{36}-1$, e a equação $x^2+2x-5=0$ .

Mostra que *k* é uma das soluções da equação dada.

**3.** Na figura estão representados um quadrado [*ABCD*] e um triângulo [*ABP*].
Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que:

- $[EF]\perp[AB]$
- $\overline{EP}=\sqrt{2}$, sendo $P$ um ponto do segmento [*EF*];
- a medida da área do quadrado [*ABCD*], em unidades quadradas, é 32.

Mostra que a medida da área do triângulo [*ABP*] é 12.

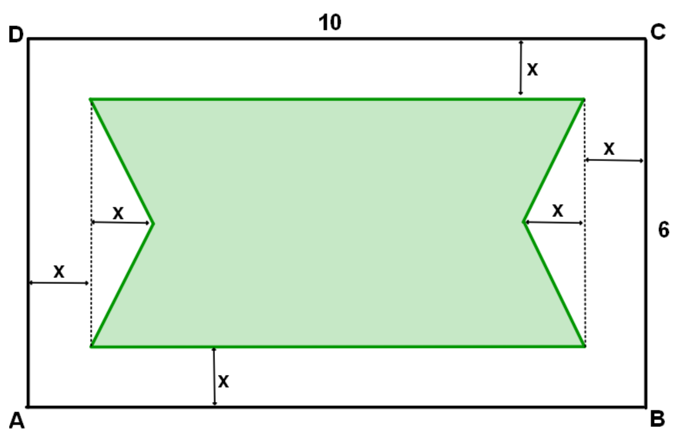



**4.** Na figura está representado um retângulo [*ABCD*].
Este retângulo é uma representação de um canteiro.
Sabe-se que:

- $\overline{AB}=10\text{m}$
- $\overline{BC}=6\text{m}$

A parte sombreada, corresponde a relvado.

Atendendo à informação dada na figura, mostra que a área da parte relvada, em $\text{m}^2$, é dada pelo polinómio $P(x)$, sendo $P(x)=6x^2-38x+60$ .



**5.** Considera os polinómios $P(x)=x^4-2x^3+5x-1$ e $A(x)=x^2+2x$.

Recorre ao algoritmo da divisão inteira e determina os polinómios quociente e resto da divisão inteira de $P(x)$ por $A(x)$.

**6.** Considera a família de polinómios $P(x)=x^3-ax^2+3x+b$ , $a, b \in \mathbb{R}$

**6.1.** Determina os valores de *a* e de *b*, se o polinómio $P(x)$ for divisível por $x+2$ e dividido por $x-1$ dá resto 3.

**6.2.** Sabe-se que 1 é raiz do polinómio $P(x)$ quando $a=1$ e $b=-3$.

Decompõe $P(x)$ em fatores do primeiro grau e resolve a equação $P(x)=0$.

**7.** Considera o polinómio $P(x)=3x^5+2x^4-10x^3-12x^2-x+2$.

Sabe-se que: $P(x)=(x+1)^m(x-2)^n Q(x)$, $m,n \in \mathbb{N}$

Determina *m*, *n* e $Q(x)$.

**FIM**

| | Cotações | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1.ª Parte | | | | | 2.ª Parte | | | | | | | | |
| **Questões** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **1.1.** | **1.2.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.1.** | **6.2.** | **7.** |
| **Cotações** | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 15 | 15 | 20 | 15 | 15 | 15 | 20 | 20 | 15 |

# 1.ª Parte

**1.**

$\sqrt{x^2}=|x|$. Como $x\in\mathbb{R}^-$, tem-se $|x|=-x$.

**Opção (D)**

**2.**

$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ com $a>0$.

$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}=\sqrt[6]{a^3}=a^{\frac{3}{6}}=a^{\frac{1}{2}}$

**Opção (C)**

**3.**

O polinómio $A(x)-B(x)$ tem grau 5.

Então o polinómio $C(x)=\left(A(x)-B(x)\right)^2$ tem grau 10.

**Opção (A)**

**4.**

$P(-1)=0\Leftrightarrow 2+1-k+k^2=0\Leftrightarrow k^2-k+3=0$

$k=\dfrac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}$

Equação impossível (em $\mathbb{R}$)

**Opção (C)**

**5.** O quociente da divisão de $P(x)$ por $(x-2)^3$ é $(x+3)^2$.

$(x+3)^2=x^2+6x+9$

**Opção (D)**

# 2.ª Parte

**1.**

**1.1.** $a=\dfrac{\sqrt[3]{5}\times 2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{10}}=\dfrac{5^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{10}}=\dfrac{10^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{2}}}=10^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=10^{-\frac{1}{6}}$

$a=10^{-\frac{1}{6}}$

**1.2.** Mostrar que $\dfrac{b}{\sqrt{3}+b}=\sqrt{6}-2$.

$b=\sqrt{8}-2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2^3}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$b=\sqrt{2}$

Então, tem-se:

$\dfrac{b}{\sqrt{3}+b}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Racionalizando o denominador, tem-se:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}-2}{3-2}=\sqrt{6}-2$$

Assim, conclui-se que $\dfrac{b}{\sqrt{3}+b}=\sqrt{6}-2$.

**2.**

Simplificando o valor de *k*, tem-se:

$k=24^{\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{36}-1=\sqrt{24}-\sqrt[4]{6^2}-1=\sqrt{2^2\times 6}-\sqrt{6}-1=\sqrt{6}-1$

Assim, tem-se:

$k=\sqrt{6}-1$

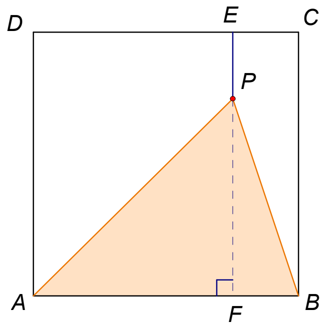
Substituindo na equação $x^2+2x-5=0$, a incógnita $x$ por $\sqrt{6}-1$, tem-se:

$\left(\sqrt{6}-1\right)^2+2\left(\sqrt{6}-1\right)-5=0$

$6-2\sqrt{6}+1+2\sqrt{6}-2-5=0$

$0=0$ (proposição verdadeira)

Conclui-se que *k* é solução da equação.




**3.** A medida do lado do quadrado é igual a $\sqrt{32}$ .

Então, $\overline{FP}=\sqrt{32}-\overline{EP}=\sqrt{2^5}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ .

A área do triângulo [*ABP*] é dada por: $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{FP}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=12$

**4.** A área da parte relvada pode ser obtida retirando a área de dois triângulos iguais à área de um retângulo.

Assim, tem-se:

$$P(x)=(10-2x)(6-2x)-2\times\frac{(6-2x)x}{2}$$

$$P(x)=60-20x-12x+4x^2-(6-2x)x$$

$$P(x)=60-20x-12x+4x^2-6x+2x^2$$

$$P(x)=6x^2-38x+60$$

**5.**

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & x^2+2x \\ \cline{6-6}
-x^4 & -2x^3 & & & & x^2-4x+8 \\ \hline
 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & \\
 & 4x^3 & +8x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 8x^2 & +5x & -1 & \\
 & & -8x^2 & -16x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -9x & -1 &
\end{array}$$

**Quociente:** $x^2-4x+8$
**Resto:** $-9x-1$

**6.**

**6.1.**

$$\begin{cases} P(-2)=0 \\ P(1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8-4a-6+b=0 \\ 1-a+3+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+b=14 \\ b=a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+a-1=14 \\ b=a-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=-6 \end{cases}$$

O polinómio $P(x)$ é divisível por $x+2$ e dividido por $x-1$ dá resto 3, se $a=-5$ e $b=-6$.

**6.2.** Se $a=1$ e $b=-3$, então $P(x)=x^3-x^2+3x-3$.

Aplicando a Regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & & 1 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Daqui resulta que:

$P(x)=(x-1)(x^2-3)$, ou seja, $P(x)=(x-1)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

$P(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \ \vee \ x-\sqrt{3}=0 \ \vee \ x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow x=1 \ \vee \ x=\sqrt{3} \ \vee \ x=-\sqrt{3}$

**7.** $P(x)=3x^5+2x^4-10x^3-12x^2-x+2$ e $P(x)=(x+1)^m(x-2)^n Q(x)$, $m,n\in\mathbb{N}$

Aplicando a Regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 3 & 2 & -10 & -12 & -1 & 2 \\ -1 & & -3 & 1 & 9 & 3 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & -9 & -3 & 2 & \boxed{0} \\ -1 & & -3 & 4 & 5 & -2 & \\ \hline & 3 & -4 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\ -1 & & -3 & 7 & -2 & & \\ \hline & 3 & -7 & 2 & \boxed{0} & & \\ -1 & & -3 & 10 & & & \\ \hline & 3 & -10 & \boxed{12\neq 0} & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -7 & 2 \\ 2 & & 6 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & \boxed{0} \\ 2 & & 6 & \\ \hline & 3 & \boxed{5\neq 0} & \end{array}$$

$P(x)=(x+1)^3(x-2)(3x-1)$

Daqui resulta que: $m=3$; $n=1$ e $Q(x)=3x-1$

**FIM**