Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1 + Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u' \, (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \; (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Pretende-se formar códigos com os doze carateres existentes em EXPOENTE1819.

Quantos desses códigos começam com a sigla XPTO?

(A) 336 **(B)** 3360 **(C)** 6720 **(D)** 40 320

2. Sejam $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ dois acontecimentos possíveis, incompatíveis e equiprováveis. Sabe-se ainda que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}4$.

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cap B)$?

(A) 0 **(B)** 0,3 **(C)** 0,4 **(D)** 1

3. Seja f a função, de domínio $]-1, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(3x+3)}{x+1} + 5$$

3.1. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, prove que a seguinte proposição é verdadeira:

$$\exists\, c \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[: f'(c) = 2\left(f(0) - f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

3.2. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos.

Na sua resposta, apresente:

- o intervalo em que a função é crescente;
- o intervalo em que a função é decrescente;
- o valor de x para o qual a função tem um extremo.

3.3. Considere os pontos:

- A, ponto do gráfico de f, de abcissa c, cuja existência ficou provada na alínea 3.1.;
- B, ponto do gráfico de f cuja abcissa é o único zero da função f;
- O, origem de um referencial ortonormado.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a área do triângulo $[OAB]$.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas, com arredondamento às milésimas, dos pontos A e B;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

4.

4.1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -1 + 3i$ e $z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Determine $\frac{z_1 + (z_2)^{14}}{1 - i^{2019}}$, apresentando o resultado na forma algébrica.

4.2. Mostre que $\overline{z}\,w + z\,\overline{w}$ é um número real, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	**2.**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**4.1**	**4.2**	
8	8	14	20	20	14	12	**96**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

5. Sejam f' e f'', de domínio $\mathbb{R}$, a primeira e a segunda derivadas de uma função f, respetivamente.

Para um certo número real a, sabe-se que:

- P é o ponto do gráfico de f de abcissa a;
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = -1$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) a é um zero da função f.

(B) P é um ponto de inflexão do gráfico da função f.

(C) $f(a)$ é um máximo relativo da função f.

(D) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f.

6. Para cada número real k, considere a função f, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} & \text{se} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ k & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{3x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

6.1. Mostre que não existe nenhum valor real de k para o qual a função f é contínua em $x = 0$.

6.2. Estude o gráfico da função f quanto à existência de assíntotas não verticais, e, caso existam, escreva as suas equações.

6.3. Em $]0, +\infty[$, considere a função h definida por $h(x) = f(x) \times 3x - x^2$.

Seja r a reta tangente ao gráfico da função h que tem declive mínimo.

O declive da reta r é:

(A) $\ln 2$ **(B)** $1 - (\ln 2)^2$ **(C)** $2 - \ln 4$ **(D)** 0

7. Seja g a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $g(x) = 2\cos x + cos^2 x + 5x$.

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

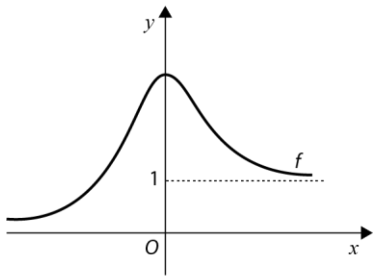
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;

– as abcissas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

8. Na figura está a representação gráfica de uma função contínua f, de domínio $\mathbb{R}$.

Tal como a figura sugere, o eixo Ox e a reta de equação $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de f.



Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{x+1}{f(x)}$.

Considere as afirmações seguintes:

(I) $g(0) \times f'(0) > 0$

(II) O gráfico da função g admite uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

(III) O gráfico da função g admite uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$.

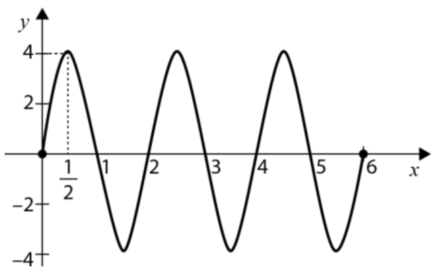
(IV) O gráfico da função g não admite assíntotas verticais.

Apenas uma das afirmações é verdadeira.

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, o valor lógico de **cada uma** das afirmações.

9. Na figura está representado, no intervalo $[0, 6]$, o movimento de um oscilador harmónico h.

Em qual das opções pode estar a expressão analítica $h(t)$ da função representada?



(A) $h(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$

(B) $h(t) = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

(C) $h(t) = 8\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

(D) $h(t) = 4\cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
5.	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**7.**	**8.**	**9.**	
8	20	20	8	20	20	8	**104**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

$$\underbrace{X}_{1}\ \underbrace{P}_{\times 1}\ \underbrace{T}_{\times 1}\ \underbrace{O}_{\times 1} \times \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{^8C_3 \times {}^5C_2 \times 3!} = 3360$$

Depois de colocados o X, o P, o T e o O, existem $^8C_3$ maneiras de colocar os três E nos oito espaços disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem $^5C_2$ formas de colocar os dois 1 nos cinco lugares ainda disponíveis, sendo que, por cada uma das maneiras de colocar o X, o P, o T, o O, os três E e os dois 1, existem 3! formas de colocar o N, o 8 e o 9.

2. Opção (B)

Sabe-se que $P(A) > 0,\ P(B) > 0,\ P(A \cap B) = 0,\ P(A) = P(B)$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$.

Assim:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}4 &\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0{,}4 \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}6 \\ &\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 \\ &\Leftrightarrow P(B) + P(B) - 0 = 0{,}6 \\ &\Leftrightarrow P(B) = 0{,}3 \end{aligned}$$

Logo, $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$.

3.

3.1. Sabemos que:

- f é contínua em $]-1, +\infty[$, logo, em particular, f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$;
- f é diferenciável em $]-1, +\infty[$, logo, em particular, f é diferenciável em $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

Assim, pelo teorema de Lagrange, pode concluir-se que $\exists c \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[: f'(c) = \frac{f(0) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{0 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$, isto é, $\exists c \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[: f'(c) = 2\left(f(0) - f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, como queríamos demonstrar.

3.2. $f'(x) = \frac{(\ln(3x+3))' \times (x+1) - \ln(3x+3) \times (x+1)'}{(x+1)^2} + 0 =$

$$= \frac{\frac{3}{3x+3} \times (x+1) - \ln(3x+3) \times 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1 - \ln(3x+3)}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$

$1 - \ln(3x+3) = 0 \ \wedge \ (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln(3x+3) = 1 \ \wedge \ x+1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 3x + 3 = e \ \wedge \ x \neq -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{e-3}{3}$

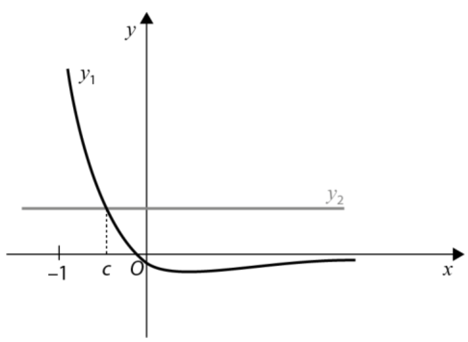
x	-1		$\frac{e-3}{3}$	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

f é crescente em $\left]-1, \frac{e-3}{3}\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{e-3}{3}, +\infty\right[$; existe um máximo de f para $x = \frac{e-3}{3}$.

3.3. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto A:

$y_1 = f'(x)$, isto é, $y_1 = \frac{1-\ln(3x+3)}{(x+1)^2}$.

$y_2 = 2\left(f(0) - f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, isto é, $y_2 = 2\left(\ln(3) + 5 - \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} - 5\right) = 2\left(\ln(3) - 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

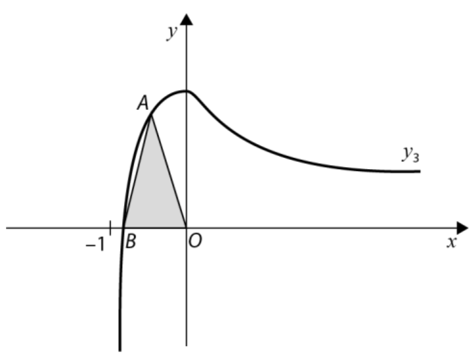


Assim, $c \approx -0,311$.

Logo, $A(-0,311; f(-0,311))$, isto é, $A(-0,311; 6,054)$.

De seguida, representemos graficamente a função f e determinemos as coordenadas do ponto B:

$$y_3 = \frac{\ln(3x+3)}{x+1} + 5$$



$B(-0,846; 0)$

$$A_{\Delta[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times y_A}{2} = \frac{0,846 \times 6,054}{2} \approx 2,56 \text{ u.a.}$$

4.

4.1.

Cálculos auxiliares

(1) $z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) = -\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = -e^{i\frac{\pi}{7}} = e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)} = e^{i\left(\frac{8\pi}{7}\right)}$

Logo, $(z_2)^{14} = e^{i\left(\frac{8\pi}{7}\right)\times 14} = e^{i(16\pi)} = 1$.

(2) $i^{2019} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 4 \\ \hline 3 & 504 \end{array}$$

$$\frac{z_1+(z_2)^{14}}{1-i^{2019}} = \frac{-1+3i+1}{1-(-i)} = \frac{3i}{1+i} =$$

$$= \frac{3i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3i-3i^2}{1-i^2} =$$

$$= \frac{3i+3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

4.2. Seja $z = a + bi$ e $w = c + di$, onde a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.

Assim:

$$\overline{z}\, w + z\, \overline{w} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di) =$$

$$= ac + adi - bci - bdi^2 + ac - adi + bci - bdi^2 =$$

$$= 2ac + bd + bd =$$

$$= 2ac + 2bd \in \mathbb{R}$$

<u>Caderno 2</u>

5. Opção (C)

P é o ponto do gráfico de f de abcissa a, logo $P(a, f(a))$. Como $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$, conclui-se que $f'(a) = 0$ e como $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = -1$, conclui-se que $f''(a) = -1$.

Assim, como $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, podemos concluir que $f(a)$ é um máximo relativo da função f.

6.

6.1. f é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, ou seja, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Ora:

- $f(0) = k$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{3x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$

• $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\operatorname{sen}^2 x} =$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2}\times\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\times\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\times 3\right) =$$

$$= \lim_{3x^2\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}\times 3 =$$

$$= 1\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}\times 3 =$$

$$= 3$$

Visto que $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, conclui-se assim que não existe nenhum valor real de k para o qual a função f é contínua em $x=0$.

6.2. Como f tem domínio $\left[-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, apenas faz sentido estudar as assíntotas não verticais ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

Assim:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-1}{3x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{3x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{3x^2}-\frac{1}{3x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\times(+\infty) - 0 =$$

$$= +\infty \notin \mathbb{R}$$

Conclui-se, assim, que o gráfico de f não admite assíntotas não verticais.

6.3. Opção (C)

Em $]0,+\infty[$, $h(x) = f(x)\times 3x - x^2$. Logo, $h(x) = \frac{e^x-1}{3x}\times 3x - x^2 = e^x - 1 - x^2$.

Assim, em $]0,+\infty[$, $h'(x) = e^x - 2x$ e $h''(x) = e^x - 2$.

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$

x	0		$\ln(2)$	$+\infty$
Sinal de h''	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de h'	n.d.	↘	mín.	↗

Seja r a reta tangente ao gráfico da função h que tem declive mínimo.

Tem-se que $h'(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - 2\ln(2) = 2 - \ln(4)$ é o declive da reta r.

7. Seja g a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $g(x) = 2\cos x + \cos^2 x + 5x$.Tem-se que:

$g'(x) = -2\text{sen}x - 2\cos x\,\text{sen}x + 5 = -2\text{sen}x - \text{sen}(2x) + 5$

$g''(x) = -2\cos x - 2\cos(2x)$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos x - 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow -\cos x = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \cos(\pi + x) = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \pi + x = 2x + 2k\pi \quad \vee \quad \pi + x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in]-\pi, \pi[$, $x = -\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Sinal de g''	n.d.	+	0	–	0	+	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right[$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$; tem dois pontos de inflexão de abcissas $x = -\frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

8. $f'(0) = 0$, pois, em $x = 0$, a função f é diferenciável e apresenta um máximo.

Assim, $g(0) \times f'(0) = 0$, pelo que a afirmação (I) é falsa.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{f(x)} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$, logo o gráfico da função g não admite uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$ e a afirmação (II) é falsa.

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{f(x)} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$, logo o gráfico da função g não admite uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$ e a afirmação (III) é falsa.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$ e não tem zeros, logo a função g é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, cujo denominador não se anula. Assim, o gráfico da função g não admite assíntotas verticais e a afirmação (IV) é a afirmação verdadeira.

9. Opção (D)

Sendo h um oscilador harmónico, $h(t)$ é da forma $h(t) = A\cos(\omega\pi + \varphi)$.

Por observação da representação gráfica, $A = 4$, pois o máximo é 4 e o mínimo é -4 e $T = 2$.

Como $T = \frac{2\pi}{\omega}$, vem que $2 = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \pi$. Assim, $h(t) = 4\cos(\pi t + \varphi)$, o que exclui as opções (A) e (C).

Como $h\left(\frac{1}{2}\right) = 4$, exclui-se a opção (B), pois, nesta opção, $h\left(\frac{1}{2}\right) = 4\cos\left(\pi \times \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\pi = -4$.

Na opção (D), $h\left(\frac{1}{2}\right) = 4\cos\left(\pi \times \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = 4\cos(2\pi) = 4$.