Proposta de teste de avaliação

Matemática A

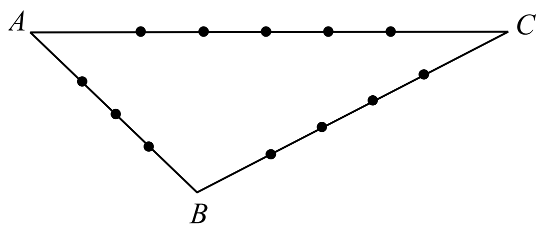
12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Sobre os lados do triângulo $[ABC]$ são assinalados 12 pontos: três sobre o lado $[AB]$, quatro sobre o lado $[BC]$ e cinco sobre o lado $[AC]$.



1.1. De quantas maneiras se podem escolher três destes pontos de forma que definam um triângulo?

(A) 145 **(B)** 205 **(C)** 220 **(D)** 350

1.2. Selecionam-se, ao acaso, dois destes pontos.
Determine a probabilidade de os pontos selecionados pertencerem ao mesmo lado do triângulo $[ABC]$

2. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o oitavo elemento é diferente dos restantes. Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha.

Qual é a probabilidade de que esse elemento seja superior a 2000 ?

(A) $\frac{5}{14}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

3. Oito amigos, quatro rapazes e quatro raparigas, vão dar um passeio ao Bom Jesus de Braga.

Decidiram que iriam subir de elevador.

No elevador existem seis bancos corridos com capacidade para quatro pessoas cada um.

De quantas maneiras os oito amigos se podem sentar, se:

3.1. ocuparem dois dos bancos (ficam dois bancos completamente ocupados);

3.2. as raparigas ficarem num banco e os rapazes ficarem noutro;

(A) ${}^6A_2 \times 8!$ **(B)** ${}^6C_2 \times 8!$ **(C)** ${}^6A_2 \times 4! \times 4!$ **(D)** ${}^6C_2 \times 4! \times 4!$

3.3. ficarem nos dois primeiros bancos, mas a Marta e a Joana não ficarem no mesmo banco do Pedro.

4. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices de um polígono regular de n lados.

4.1. Se $n = 10$, qual é a probabilidade de os dois vértices selecionados pertencerem a uma diagonal do polígono?

4.2. Sabe-se que a probabilidade de os dois vértices escolhidos serem consecutivos é igual a $0{,}1$. Quantos lados tem o polígono?

5. Um dos termos de desenvolvimento de $\left(a + \frac{x}{2}\right)^8$ é igual a $14x^5$.

Qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** -2 **(C)** 1 **(D)** -1

6. Seja S, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos independentes ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Mostre que $P(B \mid A) + P(A) \times P(\overline{B}) = P(A \cup B)$.

7. Uma caixa **1** tem bolas brancas e bolas pretas, em igual número.

Uma caixa **2** tem apenas bolas brancas.

Retirou-se, ao acaso, uma bola de cada caixa e, sem ver a cor, introduziram-se num saco que estava vazio.

De seguida, retirou-se, também ao acaso, uma bola do saco e verificou-se que era branca.

Determine a probabilidade de a bola que ficou no saco ser preta.

8. Considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{8x - 4x^2} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{2 - \sqrt{2x}}{2 - x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

8.1. Determine, caso exista, o valor de k para o qual a função f é contínua em $x = 2$.

8.2. Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota paralela ao eixo Ox, quando $x \to +\infty$.

FIM

Cotações:

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	
10	15	10	15	10	20	15	20	10	20	20	20	15	**200**

Máximo Matemática A 12

Proposta de resolução

1. **1.1.** $3\times4\times5+{}^{3}C_2\times9+{}^{4}C_2\times8+{}^{5}C_2\times7=60+3\times9+6\times8+10\times7=205$

Dois pontos em $[AC]$ e um entre os restantes

Dois pontos em $[BC]$ e um entre os restantes

Dois pontos em $[AB]$ e um entre os restantes

Um ponto em cada um dos lados

Resposta: (B)

1.2. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2=66$

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_2+{}^{4}C_2+{}^{3}C_2=10+6+3=19$

$P=\frac{19}{66}\approx0,29\approx29\%$

2. Se o oitavo elemento é diferente dos restantes então é o elemento central pelo que a linha tem $7+1+7=15$ elementos e é formada pelos elementos a forma ${}^{14}C_p$, $0\le p\le14$.

O maior elemento da linha é o oitavo, ou seja, é ${}^{14}C_7=3432$.

Vejamos quantos elementos da linha s superiores a 2000:

${}^{14}C_6={}^{14}C_8=3003$; ${}^{14}C_5={}^{14}C_9=2002$.

Há, portanto, cinco elementos superiores a 2000.

A probabilidade pedida é $P=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

Resposta: (D)

3. **3.1** ${}^{6}C_2\times P_8=15\times8!=604\,800$

Número de maneiras de escolher a ordem pela qual se sentam nos oito lugares

Número de maneiras de escolher os dois bancos

3.2. ${}^{6}A_2\times4!\times4!$

Número de maneiras de sentar as raparigas no seu banco

Número de maneiras de sentar os rapazes no seu banco

Número de maneiras de escolher ordenadamente os dois bancos (rapazes-raparigas ou raparigas-rapazes)

Resposta: **(C)**

3.3. $8\times{}^{4}A_2\times5!=11\,520$

Número de maneiras de sentar ordenadamente os cinco restantes.

Número de maneiras de sentar ordenadamente a Marta e a Joana no outro banco

Número de maneiras de escolher o lugar do Pedro

4. **4.1.** Número de casos possíveis: ${}^{10}C_2 = 45$

Número de casos favoráveis: ${}^{10}C_2 - 10 = 35$

$$P = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

4.2. Número de casos possíveis: ${}^{n}C_2$

Número de casos favoráveis: n (o número de pares de vértices consecutivos é igual ao número de lados)

$$P = \frac{n}{{}^{n}C_2} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}\text{ , } n \geq 3$$

$$P = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2}{n-1} = \frac{1}{10} \wedge n \geq 3 \Leftrightarrow 20 = n-1 \wedge n \geq 3 \Leftrightarrow n = 21$$

O polígono tem 21 lados.

5. $(a+x)^8 = \sum_{p=0}^{8} {}^{8}C_p a^{8-p} x^p$ $\left(a+\frac{x}{2}\right)^8 = \sum_{p=0}^{8} {}^{8}C_p a^{8-p} \left(\frac{x}{2}\right)^p$

$${}^{8}C_p a^{8-p} \left(\frac{x}{2}\right)^p = {}^{8}C_p a^{8-p} \frac{x^p}{2^p} = {}^{8}C_p \frac{a^{8-p}}{2^p} x^p$$

Se ${}^{8}C_p \frac{a^{n-p}}{2^p} x^p = 14x^5$ vem ${}^{8}C_p \frac{a^{n-p}}{2^p} = 14 \wedge p = 5$

Para $p = 5$ temos:

$${}^{8}C_5 \frac{a^{8-5}}{2^5} = 14 \Leftrightarrow 56 \times \frac{a^3}{32} = 14 \Leftrightarrow a^3 = \frac{14 \times 32}{56} \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: (A)

6. Se A e B são acontecimentos independentes então $P(B \mid A) = P(B)$ e $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

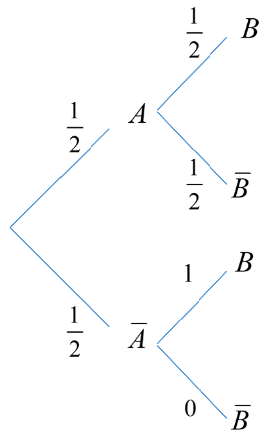
$$P(B \mid A) + P(A) \times P(\overline{B}) =$$
$$= P(B) + P(A) \times [1 - P(B)] =$$
$$= P(B) + P(A) - P(A) \times P(B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(A \cup B)$$

7. Sejam os acontecimentos:

A: "A bola retirada da caixa 1 é preta"

B: "A bola retirada do saco é branca"

A bola que ficou no saco é preta se a bola retirada da caixa 1 for preta, isto é, se A ocorrer. Portanto, pretende-se determinar $P(A \mid B)$.



- $P(A)=\frac{1}{2}$ porque a caixa 1 tem tantas bolas pretas como brancas;
- Se A ocorrer, o saco fica com uma bola preta e uma bolas branca. Logo, $P(B \mid A)=\frac{1}{2}$.
- Se $\overline{A}$ ocorrer, o saco fica duas bolas brancas. Logo, $P(B \mid \overline{A})=1$

$$P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P(B \mid A)}{P(A \cap B)+P(\overline{A} \cap B)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$P(A \mid B)=\frac{1}{3}$$

7.1. f é contínua em $x=2$ se, e somente se, existir $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{8x-4x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{-4x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{-4x}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt{2x}}{2-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3^+}\frac{\left(2-\sqrt{2x}\right)\left(2+\sqrt{2x}\right)}{(2-x)\left(2+\sqrt{2x}\right)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4-2x}{(2-x)\left(2+\sqrt{2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(2-x)}{(2-x)\left(2+\sqrt{2x}\right)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{2+\sqrt{2x}}=\frac{2}{2+\sqrt{4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, a função f é descontínua em $x=2$, qualquer que seja o valor de k. Logo, não existe valor de k para o qual a função f é contínua em $x=2$.

7.2. $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2-\sqrt{2x}}{2-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{2}{x}}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{0-0}{0-1}=0$$

A reta de equação $y=0$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.