Teste de Matemática A

2021 / 2022

Teste N.º 1

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi \, r \, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. A turma X de uma determinada escola é constituída por 24 alunos, 12 rapazes e 12 raparigas.

1.1. Pretende-se formar uma comissão para organizar uma festa de *Halloween*. A comissão terá quatro elementos e terá de ser constituída por rapazes e por raparigas.

Quantas comissões diferentes se poderão formar?

(A) ${}^{24}C_4 - {}^{12}C_4$

(B) ${}^{24}C_4 - \left({}^{12}C_4\right)^2$

(C) ${}^{12}C_3 \times 12 \times 2 + \left({}^{12}C_2\right)^2$

(D) ${}^{12}C_3 \times 12 \times 2 + {}^{12}C_2 \times 2$

1.2. Considere agora que se pretende tirar uma fotografia com todos os elementos da turma X, colocados lado a lado. Os gémeos Pedro e Simão fazem parte da turma, mas não gostam de ficar juntos nas fotografias. Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de o fazer, respeitando a vontade dos gémeos.

2. De uma determinada linha do triângulo de Pascal, sabe-se que o seu antepenúltimo elemento é 990. Quantos são os elementos dessa linha inferiores a $20\,000$?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 5 **(D)** 10

3. Considere todos os números de telefone da rede móvel que cumprem as seguintes condições:

- são constituídos por 9 algarismos;
- começam por 91;
- têm exatamente quatro algarismos 1;
- têm exatamente três algarismos 5;
- o número de telefone formado é um número múltiplo de 5.

Quantos são esses números de telefone?

4. Na turma Y de uma determinada escola todos os alunos têm preferência por um dos três clubes de futebol da cidade. Sabe-se que 10 alunos preferem o clube A, n alunos preferem o clube B e m alunos preferem o clube C. Considere que se pretende colocar lado a lado todos os alunos desta turma.

Qual é a probabilidade de todos os alunos que preferem o clube B ficarem juntos, bem como ficarem juntos todos os alunos que preferem o clube C?

(A) $\frac{n!\times m!\times 10!}{n!+m!+10!}$ **(B)** $\frac{n!\times m!\times 11!}{(n+m+10)!}$ **(C)** $\frac{n!\times m!\times 10!\times 3!}{n!+m!+10!}$ **(D)** $\frac{n!\times m!\times 12!}{(n+m+10)!}$

5. Considere, num plano, uma reta r e um ponto A exterior à reta. Assinala-se na reta um certo número n de pontos distintos. Sabe-se que, com o ponto A e com os pontos assinalados na reta r, é possível definir exatamente 156 vetores não nulos distintos. Determine o valor de n.

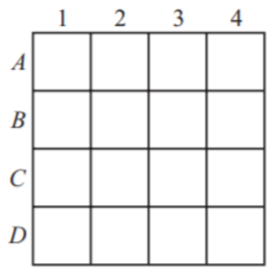
6. Um saco contém nove cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 9.

6.1. Colocam-se os nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta.

Qual é a probabilidade de os cartões numerados com um número primo ficarem juntos?

(A) $\frac{1}{504}$ **(B)** $\frac{1}{126}$ **(C)** $\frac{5}{126}$ **(D)** $\frac{1}{21}$

6.2. Considere agora, além dos nove cartões numerados de 1 a 9, sete peças pretas indistinguíveis entre si.



Considere também, como indica a figura ao lado, um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais $(A, B, C \text{ e } D)$ e em quatro filas verticais $(1, 2, 3 \text{ e } 4)$.

Pretende-se dispor os nove cartões e as sete peças pretas no tabuleiro, de modo a ocupar todas as casas. Quantas configurações diferentes do tabuleiro se podem obter, de modo que as peças pretas se disponham apenas em duas filas horizontais e os cartões com um número par inscrito ocupem também uma fila horizontal?

7. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E \text{ e } B \subset E)$. Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}5$
- $P(B) = 0{,}55$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}2$

O valor da probabilidade condicionada $P\left(\bar{B} | (A \cup B)\right)$ é igual a:

(A) $\frac{3}{16}$ **(B)** $\frac{5}{16}$ **(C)** $\frac{7}{16}$ **(D)** $\frac{9}{16}$

8. Numa determinada escola secundária, relativamente aos alunos de 12.º ano, sabe-se que:

- 40% dos alunos são rapazes;
- $\frac{2}{3}$ das raparigas estão inscritas em Biologia;
- $\frac{3}{7}$ dos alunos inscritos em Biologia são rapazes.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno desta turma.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser um rapaz que não está inscrito em Biologia. Apresente o resultado na forma de percentagem.

9. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que A e B têm ambos probabilidade não nula.

Prove que:

$$P\left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) - P\left((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cup B)\right) = P(A)\left(P(B|A) - 1\right)$$

10. Considere o desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + \frac{2a}{x}\right)^8$, com $x > 0$ e $a \in \mathbb{R}^-$.

Sabendo que o coeficiente do termo em x é igual a 1008, determine o valor da constante a.

11. Considere, num plano α, duas retas estritamente paralelas r e s.

Assinalaram-se, na reta r, sete pontos distintos e, na reta s, um certo número n de pontos, igualmente distintos.

Escolhem-se, ao acaso, três dos pontos assinalados nas duas retas.

A probabilidade de esses três pontos definirem um triângulo é igual a:

$$\frac{7 \times {}^{n}C_2 + {}^{7}C_2 \times n}{{}^{7+n}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**TOTAL**
10	18	10	18	10	18	10	18	10	18	20	20	20	**200**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (C)

$$\underbrace{{}^{12}C_3 \times {}^{12}C_1}_{\substack{\text{número de comissões}\\ \text{com 3 raparigas e 1 rapaz}}} + \underbrace{{}^{12}C_3 \times {}^{12}C_1}_{\substack{\text{número de comissões}\\ \text{com 3 rapazes e 1 rapariga}}} + \underbrace{{}^{12}C_2 \times {}^{12}C_2}_{\substack{\text{número de comissões}\\ \text{com 2 rapazes e 2 raparigas}}} = {}^{12}C_3 \times 12 \times 2 + \left({}^{12}C_2\right)^2$$

1.2. 24! é o número total de maneiras de colocar todos os elementos da turma lado a lado.

2! × 23! é o número de maneiras de os gémeos ficarem juntos.

$$\underbrace{\_\_\ \ \_\_}_{2!}\quad \underbrace{\_\_\ \ \_\_\ \ \_\_\ \ \_\_\ \ \_\_\ \ \ldots\ \ \_\_}_{\text{os 22 elementos da turma que não são os gémeos}} \times \quad 23!$$

Assim, o número de maneiras de todos se colocarem lado a lado para tirar uma fotografia, sem que os gémeos fiquem juntos, é 24! – 2! × 23!.

2. Opção (B)

Consideremos a linha n do triângulo de Pascal.

Sabe-se que ${}^{n}C_{n-2} = 990$, logo ${}^{n}C_2 = 990$.

Assim:

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 990 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 990$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 1980 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1980)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 45 \lor n = -44$$

$n = 45$

${}^{45}C_0 = {}^{45}C_{45} = 1$

${}^{45}C_1 = {}^{45}C_{44} = 45$

${}^{45}C_2 = {}^{45}C_{43} = 990$

${}^{45}C_3 = {}^{45}C_{42} = 14\,190$

${}^{45}C_4 = 148\,995 > 20\,000$

Tem-se, então, oito elementos da linha $n = 45$ que são inferiores a 20 000.

3.

$$\underline{9}\ \ \underline{1}\ \ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \ \underline{0} \qquad \text{ou} \qquad \underline{9}\ \ \underline{1}\ \ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \ \underline{5}$$

$$1\times 1 \quad \times\ {}^6C_3 \quad \times 1 \qquad + \qquad 1\times 1 \quad \times\ {}^6C_3\ \times\ {}^3C_2 \quad \times 8$$

${}^6C_3$ é o número de maneiras de escolher três posições, das seis disponíveis, para colocar os três algarismos 1 que faltam.
Por cada uma destas maneiras, só existe uma forma de colocar os três algarismos 5.

${}^6C_3$ é o número de maneiras de escolher três posições, das seis disponíveis, para colocar os três algarismos 1 que faltam.
${}^3C_2$ é o número de maneiras de escolher duas posições, das três disponíveis, para colocar os dois algarismos 5 que faltam.
8 é o número de opções (2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 0) para colocar na posição que sobra.

$${}^6C_3\ +\ {}^6C_3\ \times\ {}^3C_2\ \times 8 = 20 + 480 = 500$$

Assim, existem 500 números de telefone nas condições pretendidas.

4. Opção (D)

Número total de alunos: $10 + n + m$

Número de casos possíveis: $(10 + n + m)!$

Número de casos favoráveis: $n! \times m! \times 12!$

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{10 \text{ alunos}} \quad \underbrace{\_\ \_\ \_ \cdots \_}_{\substack{n \text{ alunos} \\ n!}} \quad \underbrace{\_\ \_\ \_ \cdots \_}_{\substack{m \text{ alunos} \\ m!}} \quad \times (10 + 1 + 1)!$$

(12! é o número de maneiras de permutar os 10 alunos que preferem o clube A, o bloco de alunos que preferem o clube B e o bloco de alunos que preferem o clube C, todos entre si.)

5. $${}^nA_2 + 1 \times n \times 2 = 156 \Leftrightarrow n(n-1) + 2n = 156$$
$$\Leftrightarrow n^2 - n + 2n - 156 = 0$$
$$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-156)}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow n = 12 \ \vee\ n = -13 \notin \mathrm{IN}$$

Assim, $n = 12$.

6.

6.1. Opção (D)

Número de casos possíveis: 9!

Número de casos favoráveis: 4! × 6!

$$\underline{2}\ \underline{3}\ \underline{5}\ \underline{7}\quad \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$
$$4! \quad \times \quad 6!$$

A probabilidade pretendida é $\frac{4!\times 6!}{9!} = \frac{17\,280}{362\,880} = \frac{1}{21}$.

6.2. ${}^4C_2 \times 8 \times {}^2C_1 \times 4! \times 5! = 276\,480$

- ${}^4C_2$ é o número de maneiras de escolher duas das quatro linhas horizontais onde vão ser colocadas as peças pretas;
- 8 é o número de maneiras de escolher, de entre os oito lugares das duas filas escolhidas para ficar com as sete peças pretas, o único lugar que não ficará ocupado por peças pretas;
- ${}^2C_1$ é o número de maneiras de escolher uma das duas filas restantes para se colocarem os cartões com um número par inscrito;
- 4! é o número de maneiras de permutar os quatro cartões com um número par inscrito na fila escolhida;
- 5! é o número de maneiras de permutar os cinco cartões com um número ímpar inscrito nos cinco lugares que restam.

7. Opção (B)

- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}2 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}2 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}2$
  $\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$
- $P(A \cup B) = 0{,}8 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8$
  $\Leftrightarrow 0{,}5 + 0{,}55 - P(A \cap B) = 0{,}8$
  $\Leftrightarrow 0{,}25 = P(A \cap B)$

$$P\left(\overline{B} \middle| (A \cup B)\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap (A \cup B)\right)}{P(A \cup B)} = \frac{P\left((\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B)\right)}{P(A \cup B)} =$$
$$= \frac{P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \emptyset\right)}{P(A \cup B)} =$$
$$= \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P(A \cup B)} =$$
$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A \cup B)} =$$
$$= \frac{0{,}5 - 0{,}25}{0{,}8} =$$

$$= \frac{0{,}25}{0{,}8} =$$

$$= \frac{5}{16}$$

8. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "ser rapaz"

B: "estar inscrito em Biologia"

Sabemos que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{A}) = 0{,}6$
- $P\left(B \middle| \overline{A}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{6}{10}$

  $\Leftrightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = \frac{2}{5}$
- $P(A|B) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)} = \frac{3}{7}$

  $\Leftrightarrow 7P(A \cap B) = 3(P(A \cap B) + 0{,}4)$

  $\Leftrightarrow 7P(A \cap B) = 3P(A \cap B) + 1{,}2$

  $\Leftrightarrow 4P(A \cap B) = 1{,}2$

  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

Organizando os dados numa tabela:

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	0,3	?	0,4
$\overline{A}$	$\frac{2}{5}$		0,6
Total			1

$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1;\, 10\%$

Logo, a probabilidade pedida é igual a 10%.

9. $P\left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) - P\left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cup B)\right) = P\left(\overline{A} \cup B\right) - P\left(\left(\overline{A \cup B}\right) \cup (A \cup B)\right) =$

$$= P(\bar{A}) + P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right) - P(E) =$$

$$= 1 - P(A) + P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right) - 1 =$$

$$= -P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= -P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= -P(A) + P(A \cap B) =$$

$$= P(A)\left(-1+\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\right) =$$

$$= P(A)(P(B|A)-1) \qquad \text{c.q.d.}$$

10. O termo geral deste desenvolvimento é:

$$^{8}C_k \ \left(\sqrt{x}\right)^{8-k} \times \left(\frac{2a}{x}\right)^k = \ ^{8}C_k \ x^{4-\frac{k}{2}} \times 2^k \times a^k \times x^{-k} =$$

$$= \ ^{8}C_k \ x^{4-\frac{3k}{2}} \times 2^k \times a^k$$

$$= \ ^{8}C_k \ 2^k \times a^k \times x^{4-\frac{3k}{2}}, \text{ com } k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$4-\frac{3k}{2} = 1 \Leftrightarrow 3 = \frac{3k}{2} \Leftrightarrow k = 2$$

O coeficiente do termo em x é $^{8}C_2 \ \times 2^2 \times a^2$. Logo:

$$^{8}C_2 \ \times 4a^2 = 1008 \Leftrightarrow 112a^2 = 1008 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$$

Como $a \in \mathrm{IR}^-$, então $a = -3$.

11. Sabemos que existem sete pontos distintos assinalados na reta r e n pontos distintos assinalados na reta s.

$^{7+n}C_3$ é o número de maneiras de escolher quaisquer três pontos (sem que a ordem interesse) de entre os $7+n$ pontos assinalados nas duas retas. Logo, o número de casos possíveis é $^{7+n}C_3$.

Existem duas hipóteses mutuamente exclusivas para definir um triângulo com os três pontos escolhidos: ou se escolhe um ponto da reta r e dois pontos da reta s ou se escolhem dois pontos da reta r e um ponto da reta s.

Para o primeiro caso, existem 7 modos distintos de escolher um ponto da reta r e, por cada uma destes modos, existem $^{n}C_2$ maneiras distintas de escolher dois pontos da reta s (sem que a ordem interesse).

Para o segundo caso, existem $^{7}C_2$ modos distintos de escolher dois pontos da reta r (sem que a ordem interesse) e, por cada um destes modos, existem n maneiras distintas de escolher um ponto da reta s.

Logo, o número de casos favoráveis é $7 \times \ ^{n}C_2 \ + \ ^{7}C_2 \ \times n$.

Segundo a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis e em número finito. Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{7 \times \ ^{n}C_2 \ + \ ^{7}C_2 \ \times n}{^{7+n}C_3}$$