Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de teste de avaliação [maio – 2019]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado de cada caderno.

CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Sejam (u_n) e (w_n) sucessões tais que:

- (u_n) é definida por recorrência do seguinte modo: $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_n = 5 + 2u_{n-1} \text{ se } n > 1 \end{cases}$;
- o termo geral de (w_n) é $w_n = 3n + 2$.

1.1. Sabe-se que $u_{13} = 8187$. Qual é o valor de n de modo que $w_n = u_{12}$?

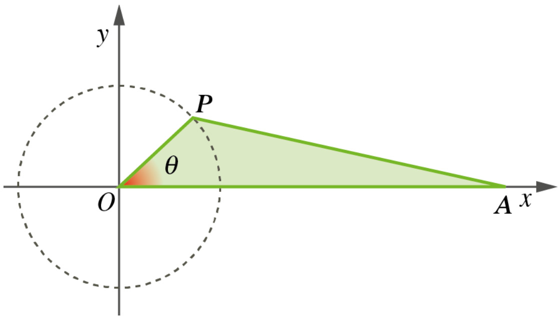
(A) 5459 **(B)** 2728

(C) 1363 **(D)** 2730

1.2. A sucessão (w_n) é uma progressão aritmética.

Calcula a soma de 25 termos consecutivos, sendo o primeiro desses termos w_8.

2. Na figura, em referencial o.n. Oxy, está representada a circunferência de centro O e raio 1.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(4, 0)$;
- o ponto P pertence à circunferência;
- a amplitude do ângulo AOP, em radianos, é representada por θ, em que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

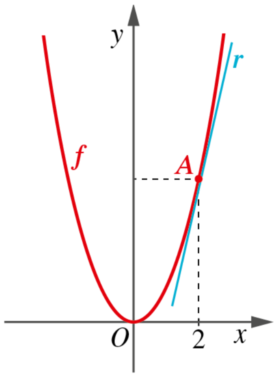
2.1. Mostra que $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 1 - 4\cos\theta$.

2.2. Sabendo que $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 1 - 4\cos\theta$, determina o valor de θ para o qual o triângulo $[OAP]$ é retângulo em P.

Apresenta o resultado arredondado às milésimas.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2$.

Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representados o gráfico da função f e a reta r tangente ao gráfico no ponto A de abcissa 2.



3.1. Designa por θ a inclinação da reta r.
Qual é a amplitude de θ, em graus, arredondada às centésimas?

(A) $75{,}96$ **(B)** $1{,}33$

(C) $63{,}43$ **(D)** $82{,}87$

3.2 Determina, na forma reduzida, a equação da reta s perpendicular à reta r e que passa em A.

4. Num rio houve um derrame de óleo. O alerta foi dado às 8 horas e iniciaram-se medidas de combate à poluição.

A primeira medida foi rodear a superfície poluída da água por barreiras flutuantes. De seguida, quando a área poluída era máxima, iniciou-se a aspiração do óleo.

O fim da intervenção ocorreu quando a área afetada era 5% da área registada no momento do alerta.

Admite que t horas após o instante em que o alerta foi dado, a área da superfície da água poluída, em metros quadrados, é dada pela função f definida por

$$f(t)=\frac{-0{,}15t^3-2{,}5t^2+48t+28}{t+0{,}8}$$

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e recolhe a informação necessária para completar o relatório da ocorrência apresentado a seguir.

Relatório da ocorrência	
• Hora do alerta	08 h 00 min 00 s
• Área da superfície poluída no momento do alerta	____ m^2
• Hora de início da aspiração do óleo	____ h ____ min (minutos arredondados às unidades)
• Hora do fim da intervenção	____ h ____ min (minutos arredondados às unidades)

Deves apresentar gráfico(s) e assinalar pontos relevantes que te permitam dar as respostas pretendidas.

FIM
(Caderno 1)

Cotações								Total
Questões – Caderno 1	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	
Pontos	10	15	15	15	10	15	15	95

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

5. Em relação a um referencial o.n. *Oxyz*, considera a superfície esférica definida pela equação $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=14$.

5.1. A superfície esférica $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=14$ interseta o eixo *Oy* em dois pontos que são os extremos do diâmetro de outra superfície esférica.
Essa superfície esférica pode ser definida pela equação:

(A) $x^2+(y+1)^2+z^2=9$ **(B)** $x^2+y^2+z^2=9$

(C) $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=3$ **(D)** $x^2+y^2+z^2=3$

5.2. O plano α interseta o eixo *Oz* no ponto *P* e é tangente à superfície esférica $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=14$ no ponto $A(-2,1,0)$.
Escreve uma equação vetorial da reta AP.

6. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} & \text{se } x<-1\\ \dfrac{-4x}{x+3} & \text{se } x\geq -1\end{cases}$$

6.1. Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. O que podes concluir quanto à existência de assíntota ao gráfico de *f* quando x tende para $-\infty$?

6.2. Mostra que a função *f* é contínua em $x=-1$.

6.3. Resolve analiticamente, em $[-1,+\infty[$, a inequação $f(x)>1$.
Apresenta o resultado na forma de intervalo de números reais.

7. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.

7.1. O gráfico de *f* admite duas assíntotas que se intersetam no ponto *P*.
Determina as coordenadas de *P*.

7.2. Para cada número real *k*, considera a função *g* definida por $g(x)=\dfrac{kx+1}{4}$.

Sabe-se que $(g\circ f)(2)=\dfrac{1}{6}$. Qual é o valor de *k*?

(A) $\dfrac{7}{12}$ **(B)** $-\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{7}{6}$ **(D)** $-\dfrac{1}{4}$

8. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$, tal que g', função derivada de g, é definida por $g'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

8.1 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ é igual a:

(A) $-\infty$ **(B)** -1

(C) 0 **(D)** $+\infty$

8.2 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $g(-3)<g(-2)$ **(B)** $g\left(-\frac{1}{2}\right)>g(1)$

(C) $g(0)<g(-1)$ **(D)** $g(3)>g(5)$

9. Determina o produto mínimo de dois números reais, em que a diferença entre eles seja 1.
Explica, de forma clara, como chegaste à resposta.

FIM
(Caderno 2)

Cotações											Total
Questões – Caderno 2	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	
Pontos	10	12	10	12	10	11	10	10	10	10	**105**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1.1. $8187 = 5 + 2u_{12} \Leftrightarrow u_{12} = 4091$

$w_n = u_{12} \Leftrightarrow 3n + 2 = 4091 \Leftrightarrow n = 1363$

Resposta: Opção **(C)** 1363

1.2. O primeiro dos 25 termos consecutivos é w_8 e o último é w_{32}.
Seja S a soma desses 25 termos.

$S = \frac{w_8 + w_{32}}{2} \times 25 \Leftrightarrow S = \frac{26+98}{2} \times 25 \Leftrightarrow S = 1550$

Resposta: 1550

2.1. $P(\cos\theta, \sin\theta)$

$\overrightarrow{PO} = O - P = (-\cos\theta, -\sin\theta)$

$\overrightarrow{PA} = A - P = (4 - \cos\theta, -\sin\theta)$

$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = (-\cos\theta, -\sin\theta) \cdot (4 - \cos\theta, -\sin\theta)$

$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = -4\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 - 4\cos\theta$

Resposta: $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 1 - 4\cos\theta$

2.2. O triângulo $[OAP]$ é retângulo em P se e só se $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$.

$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0,25$

Recorrendo à calculadora, tem-se $\theta \approx 1,318 \text{ rad}$.

Resposta: $1,318 \text{ rad}$

3.1. $f'(x) = (x^2)' = 2x$

$\tan\theta = f'(2) = 4$

Recorrendo à calculadora $\theta \approx 1,33 \text{ rad} \approx 75,96°$.

Resposta: Opção **(A)** 75,96

3.2. As coordenadas do ponto A são $(2, f(2))$, ou seja, $(2, 4)$.

O declive da reta r é 4. Então, o declive da reta s é $-\frac{1}{4}$.

A equação da reta s é do tipo: $y = -\frac{1}{4}x + b$ e passa em $A(2, 4)$.

$4 = -\frac{1}{4} \times 2 + b$. Daqui resulta que $b = \frac{9}{2}$.

Equação da reta s: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

Resposta: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

4. Tem-se $f(t) = \frac{-0{,}15t^3 - 2{,}5t^2 + 48t + 28}{t + 0{,}8}$.

- Área da superfície poluída na hora do alerta:

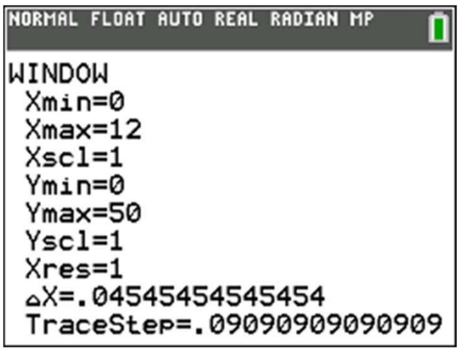
$f(0) = \frac{28}{0{,}8} = 35$

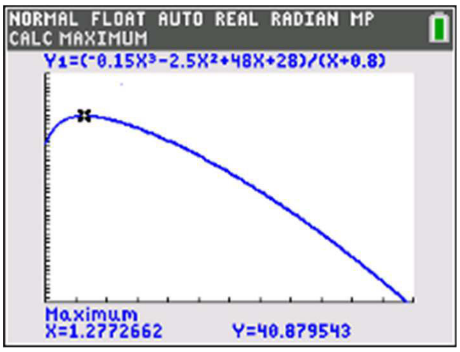
Na hora do alerta registou-se uma área de 35 m^2.

- Hora de início da aspiração do óleo:

A aspiração do óleo teve início no momento em que f atingiu o seu máximo.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se:



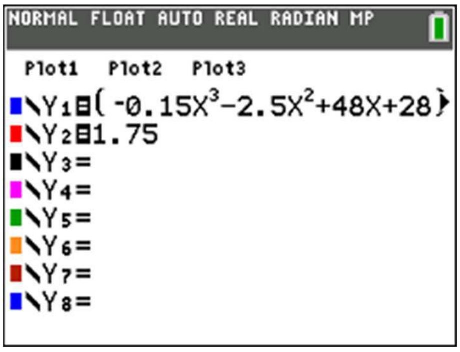


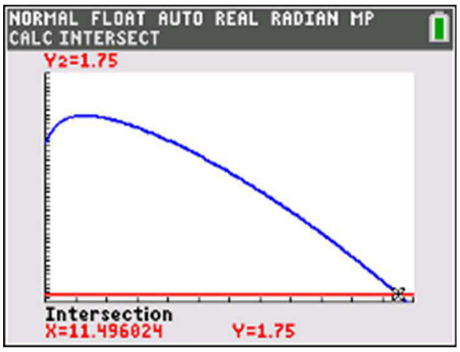
Ao fim de 1,277 h, a área poluída atingiu o máximo de, aproximadamente, 41 m^2 de área.

Como $0{,}277 \times 60 \approx 17$, conclui-se que o início da aspiração ocorreu após ter decorrido, aproximadamente, 1 h 17 min após o alerta, ou seja, cerca das 9:17.

- Hora do fim da intervenção:

É necessário resolver a equação $f(t) = 0{,}05 \times 35$, ou seja, $f(t) = 1{,}75$.





$f(t) = 1{,}75$ para $t \approx 11{,}496$ h

Como $0{,}496 \times 60 \approx 30$, conclui-se que o fim da intervenção ocorreu após terem decorrido, aproximadamente, 11 h 30 min após o alerta, ou seja, cerca das 19:30.

Resposta:

Relatório da ocorrência	
• Hora do alerta	$\underline{08}$ h $\underline{00}$ min $\underline{00}$ s
• Área da superfície poluída no momento do alerta	$35\,\text{m}^2$
• Hora de início da aspiração do óleo	9 h 17 min
• Hora do fim da intervenção	19 h 30 min

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

5.1. $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=14 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow y^2=9 \Leftrightarrow y=3 \vee y=-3$

Pontos de interseção da superfície esférica com o eixo Oy: $(0, 3, 0)$ e $(0, -3, 0)$.

A "nova" superfície esférica tem centro em $(0, 0, 0)$ e raio 3, sendo, então, definida pela equação: $x^2+y^2+z^2=9$.

Resposta: Opção **(B)** $x^2+y^2+z^2=9$

5.2 O centro da superfície esférica $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=14$ é $C(1, 0, 2)$.

O vetor $\overrightarrow{CA}$ é normal ao plano α.
$\overrightarrow{CA}=A-C=(-2,1,0)-(1,0,2)=(-3,1,-2)$

O plano α é definido por uma equação do tipo $-3x+y-2z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$ e passa em $A(-2,1,0)$.
Então, $-6+1-0+d=0$. Daqui resulta que $d=5$.
Equação do plano α: $-3x+y-2z+5=0$

O ponto P tem coordenadas $(0, 0, z)$ e pertence a α.

Então, $0+0-2z+5=0 \Leftrightarrow z=\frac{5}{2}$.

Assim, tem-se: $P\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AP}=P-A=\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)-(-2,1,0)=\left(2, -1, \frac{5}{2}\right)$$

Uma equação vetorial da reta AP é:

$(x, y, z)=A+k\overrightarrow{AP}, k\in\mathbb{R}$, ou seja, $(x, y, z)=(-2,1,0)+k\left(2,-1,\frac{5}{2}\right), k\in\mathbb{R}$

Resposta: $(x, y, z)=(-2,1,0)+k\left(2,-1,\frac{5}{2}\right), k\in\mathbb{R}$

6.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

A reta definida pela equação $y=1$ é assíntota horizontal quando $x\to-\infty$.

6.2. A função f é contínua em $x=-1$ sse $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)$.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1^{-1}} \dfrac{x-3}{x-1} = 2$

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-4x}{x+3} = 2$

- $f(-1) = \dfrac{-4\times(-1)}{-1+3} = \dfrac{4}{2} = 2$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ fica provado que *f* é contínua em $x=-1$.

6.3. $f(x) > 1 \wedge x \in [-1, +\infty[\Leftrightarrow \dfrac{-4x}{x+3} > 1 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4x-x-3}{x+3} > 0 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{-5x-3}{x+3} > 0 \wedge x \geq -1$

x	-1		3	$+\infty$
$-5x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-5x-3}{x+3}$	$-$	$-$	0	$+$

$f(x) > 1 \wedge x \in [-1, +\infty[\Leftrightarrow x \in \left[-1, -\dfrac{3}{5}\right[$

Resposta: $x \in \left[-1, -\dfrac{3}{5}\right[$

7.1. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x+1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

A reta $x=-1$ é assíntota vertical.

Assíntota oblíqua

$y = mx + b$

$m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ $\qquad m = 1$

$b = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+x-2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x-2-x^2-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2}{x^2} = 0$

A reta $y = x$ é assíntota oblíqua.

O ponto de interseção das assíntotas $x=-1$ e $y=x$ é $P(-1,-1)$.

Resposta: $P(-1,-1)$

7.2. $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{4k}{3}+1}{4} = \frac{4k+3}{12}$

$(g \circ f)(2) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{4k+3}{12} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 4k+3 = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$

Resposta: Opção **(D)** $-\frac{1}{4}$

8.1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = g'(-1) = \frac{0}{4} = 0$

Resposta: Opção **(C)** 0

8.2.

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

A função g no intervalo $]1, +\infty[$ é decrescente.

$3 < 5 \Rightarrow g(3) > g(5)$

Resposta: Opção **(D)** $g(3) > g(5)$

9. Sejam $x+1$ e x números reais cuja diferença é 1.
O seu produto é dado por $P(x) = x(x+1) = x^2 + x$.

$P'(x) = 2x+1$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$P'(x)$	$-$	0	$+$
P	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

Resposta: O produto mínimo é $-\frac{1}{4}$.