Proposta de teste de avaliação

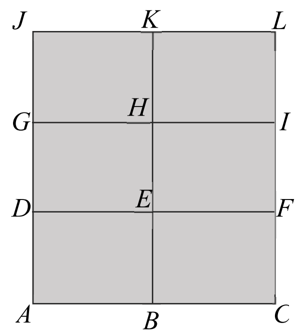
Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representado o retângulo $[ACLJ]$, o qual foi dividido em seis retângulos iguais entre si.



Seja $\vec{u} = \overrightarrow{KL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{JE}$.

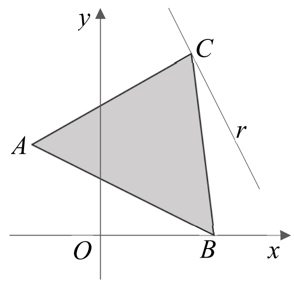
Quais são os números reais α e β, tais que $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$?

(A) $\alpha = -1$ e $\beta = 2$ **(B)** $\alpha = 1$ e $\beta = -2$

(C) $\alpha = -2$ e $\beta = 1$ **(D)** $\alpha = 2$ e $\beta = -1$

2. No referencial xOy da figura, está representado o triângulo isósceles $[ABC]$.

Sabe-se que:



- os vértices A e B têm coordenadas $(-3, 4)$ e $(5, 0)$, respetivamente;
- $[AB]$ é o maior dos lados do triângulo;
- o vértice C pertence à reta r definida pela equação vetorial $(x, y) = (7, 2) + k(-1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.

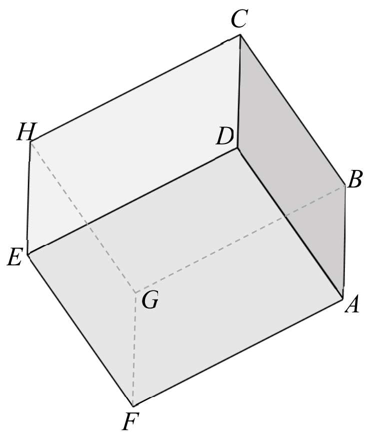
2.1. Qual das seguintes equações define a reta s que passa no ponto B e é paralela à reta r ?

(A) $2x - y = 10$ **(B)** $2x + y = 10$

(C) $x + 2y = 5$ **(D)** $2x + y = 5$

2.2. Determine as coordenadas do ponto C.

3. A figura ao lado representa o cubo $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos F, D e C têm coordenadas $(1, -2, -3)$, $(2, 2, 6)$ e $(-4, -1, 8)$, respetivamente.

Considere, ainda, a reta r definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (7, 1, -5) + k(6, 3, -2)$, $k \in \mathbb{R}$.

3.1. Em qual das seguintes opções se encontram as coordenadas do vértice G?

(A) $(-6, -3, 2)$ **(B)** $(-5, -5, -1)$

(C) $(7, 1, -5)$ **(D)** $(0, 2, 6)$

3.2. Mostre que a reta r é a reta FG.

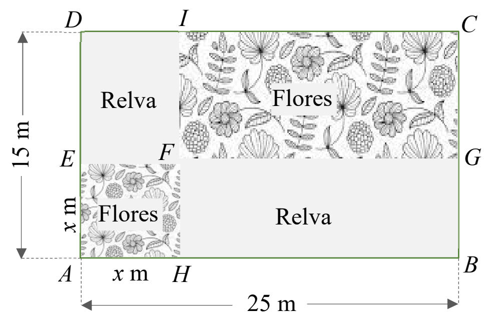
3.3. Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano xOy.

3.4. A altura da pirâmide de base $[ADEF]$ e vértice V é igual a 14.

Determine as coordenadas do vértice V, sabendo que este ponto pertence à semirreta $\dot{F}G$.

4. Na figura, está representado, em esquema, um terreno retangular, $[ABCD]$, com 15 metros de largura e 25 metros de comprimento.

Tal como a figura sugere, pretende-se dividir o terreno em duas zonas:



- uma zona destinada a flores, formada pelo quadrado $[AHFE]$ de x m de lado e pelo retângulo $[FGCI]$;
- uma zona relvada, formada pelos retângulos $[EFID]$ e $[HBGF]$.

4.1. Mostre que a área da zona relvada é dada, em metros quadrados e em função de x, por $A(x) = 40x - 2x^2$, com $0 < x < 15$.

4.2. Determine x, de forma que a área da zona relvada:

a) seja 40% da área do terreno, pelo menos;

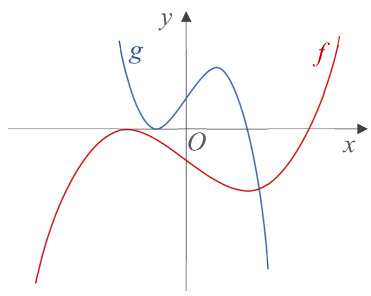
b) seja máxima.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

5.1. Resolva a inequação $f(x) > f(1)$.

Apresente o conjunto-solução utilizando a notação de intervalo de números reais.

5.2. Na figura, estão representadas graficamente a função f e uma função g, também de domínio $\mathbb{R}$.



Qual das seguintes expressões pode definir a função g?

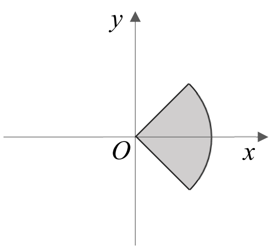
(A) $f\left(-\frac{x}{2}\right) + 4$ **(B)** $4 - f(2x)$

(C) $f\left(\frac{x}{2}\right) - 4$ **(D)** $f(-2x) + 4$

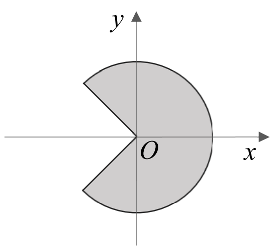
6. Considere a condição $x^2 + y^2 \leq 1 \wedge |y| - x \leq 0$.

Em qual das seguintes opções pode estar representado, em referencial ortonormado xOy, o conjunto de pontos definido por esta condição?

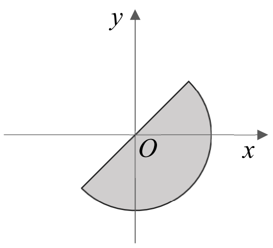
(A)



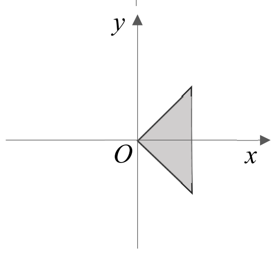
(B)



(C)



(D)



FIM

Cotações:

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**3.4**	**4.1.**	**4.2.a)**	**4.2.b)**	**5.1.**	**5.2.**	**6**	**Total**
10	10	20	10	15	20	20	20	20	15	20	10	10	**200**

Proposta de resolução

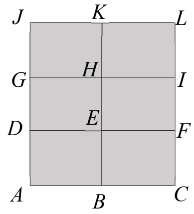
1. $\vec{u} = \overrightarrow{KL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{JE} =$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KE} =$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EK} =$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} =$

$= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$



Logo, $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, pelo que $\alpha = 2$ e $\beta = -1$.

Resposta: (D)

2.

2.1. O vetor $r(-1, 2)$ é um vetor diretor da reta r. Logo, o declive da reta r é $m = \frac{2}{-1} = -2$.

Dado que a reta s é paralela à reta r, tem o mesmo declive, $m = -2$.

Como a reta s passa em $B(5, 0)$, pode ser definida pela equação:

$y - 0 = -2(x-5) \Leftrightarrow y = -2x + 10 \Leftrightarrow 2x + y = 10$

Resposta: (B)

2.2. $A(-3, 4)$ e $B(5, 0)$

O triângulo $[ABC]$ é isósceles, sendo $\overline{AC} = \overline{BC}$. Logo, C pertence à mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

$(x+3)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 10x + 25 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8y = -10x - 6x - 25 + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8y = -16x \Leftrightarrow y = 2x$

O vértice C é o ponto de interseção da reta r com a mediatriz de $[AB]$.

$r:\ (x, y) = (7, 2) + k(-1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico da reta r: $(x, y) = (7-k, 2+2k)$, $k \in \mathbb{R}$

Este ponto pertence à reta de equação $y = 2x$ se $2 + 2k = 2(7-k)$.

$2 + 2k = 2(7-k) \Leftrightarrow 2 + 2k = 14 - 2k \Leftrightarrow 4k = 12 \Leftrightarrow k = 3$

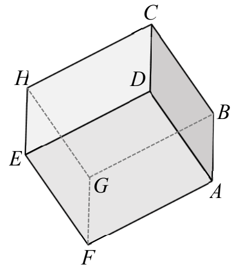
Para $k = 3$, obtemos as coordenadas do ponto $C: (7-3, 2+2\times 3) = (4, 8)$

Portanto, o ponto C tem coordenadas $(4, 8)$.

3. $F(1,-2,-3)$

$D(2,2,6)$

$C(-4,-1,8)$



3.1. $G = F + \overrightarrow{FG} = F + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DC} = (-4,-1,8)-(2,2,6) = (-6,-3,2)$

$G = F + \overrightarrow{DC} = (1,-2,-3)+(-6,-3,2) = (-5,-5,-1)$

Resposta: (B)

3.2. $r: (x, y, z) = (7, 1, -5) + k(6, 3, -2), k \in \mathbb{R}$

$(6, 3, -2) = -(-6, -3, 2) = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{FG}$

O vetor de coordenadas $(6, 3, -2)$ é colinear com o vetor $\overrightarrow{FG}$. Logo, $\overrightarrow{FG}$ é um vetor diretor da reta r.

Vejamos se o ponto $F(1,-2,-3)$ pertence à reta r.

$(1,-2,-3) = (7, 1, -5) + k(6, 3, -2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7 + 6k \\ -2 = 1 + 3k \\ -3 = -5 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 6k \\ -3 = 3k \\ 2 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow k = -1$$

Portanto, o ponto F pertence à reta r.

Como a reta r passa em F e admite $\overrightarrow{FG}$ como vetor diretor, a reta r é a reta FG.

3.3. Qualquer ponto do plano xOy tem coordenadas da forma $(x, y, 0)$.

$(x, y, 0) = (7, 1, -5) + k(6, 3, -2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 6k \\ y = 1 + 3k \\ 0 = -5 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 6 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) \\ y = 1 + 3 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) \\ k = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -\dfrac{13}{2} \end{cases}$$

A reta r interseta o plano yOz no ponto de coordenadas $\left(-8, -\dfrac{13}{2}, 0\right)$.

3.4. A altura da pirâmide é $\|\overrightarrow{FV}\| = 14$, sendo $\overrightarrow{FV}$ colinear e com o mesmo sentido de $\overrightarrow{FG}$.

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DC} = (-6, -3, 2)$

$\|\overrightarrow{FG}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36+9+4} = 7$

$\overrightarrow{FV} = k\overrightarrow{FG}$, $k > 0$ e $\|\overrightarrow{FV}\| = 14$

$\|\overrightarrow{FV}\| = 14 \Leftrightarrow \|k\overrightarrow{FG}\| = 14 \Leftrightarrow |k| \times \|\overrightarrow{FG}\| = 14 \Leftrightarrow$

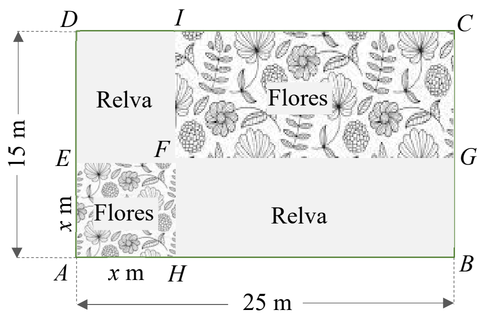
$\Leftrightarrow |k| \times 7 = 14 \Leftrightarrow |k| = 2$

Como $k > 0$, temos $k = 2$

$\overrightarrow{FV} = k\overrightarrow{FG} = 2(-6, -3, 2) = (-12, -6, 4)$

$V = F + \overrightarrow{FV} = (1, -2, -3) + (-12, -6, 4) = (-11, -8, 1)$

4.



4.1. $\overline{AH} = x$ e $\overline{HB} = 25 - x$; $\overline{AE} = x$ e $\overline{ED} = 15 - x$

$A_{\text{relvada}} = A_{[EFID]} + A_{[HBGF]} = \overline{EF} \times \overline{ED} + \overline{HF} \times \overline{HB}$

$A(x) = x(15-x) + x(25-x),\ 0 < x < \overline{AD} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = 15x - x^2 + 25x - x^2,\ 0 < x < 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = 40x - 2x^2,\quad 0 < x < 15$

4.2. **a)** $A_{\text{terreno}} = (25 \times 15)\ \text{m}^2 = 375\ \ \text{m}^2$

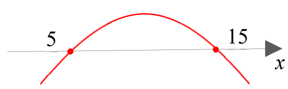
$40\% \times 375\ \text{m}^2 = 0,4 \times 375\ \text{m}^2 = 150\ \text{m}^2$

$A(x) \geq 150 \wedge 0 < x < 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40x - 2x^2 \geq 150 \wedge 0 < x < 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 150 \geq 0 \wedge 0 < x < 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [5, 15[$



Cálculos auxiliares:

$-2x^2 + 40x - 150 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 75}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{20 \pm \sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{20 \pm 10}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 15$

A área da zona relvada é pelo menos 40% da área total para $5 \leq x < 15$.

b) $A(x) = 40x - 2x^2 = -2(x^2 - 20x) = -2(x^2 - 20x + 10^2 - 10^2) =$

$= -2(x^2 - 20x + 10^2) + 2 \times 10^2 = -2(x-10)^2 + 200$

A área da zona relvada é máxima para $x = 10$ m.

5. $f(x) = x^3 - 3x - 2$

5.1. $f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) > 0$

$f(1) = 1^3 - 3 \times 1 - 2 = -4$

Dado que $f(1) - f(1) = 0$, 1 é um zero do polinómio $f(x) - f(1)$, ou seja, 1 é um zero do polinómio $f(x) - f(1) = x^3 - 3x - 2 - (-4) = x^3 - 3x + 2$.

Recorrendo à regra de Ruffini, temos:

$f(x) - f(1) = (x-1)(x^2 + x - 2)$

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	0

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$f(x) - f(1) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow$

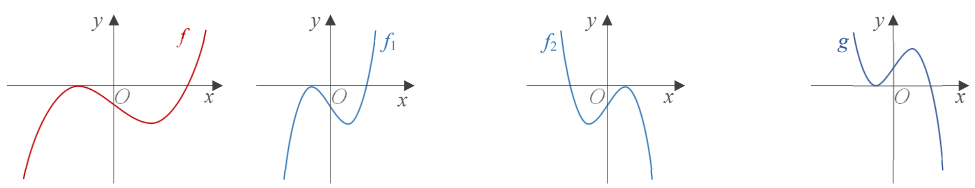
$\Leftrightarrow (x-1)^2 (x+2) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]-2, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

Cálculo auxiliar:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+
$x+2$	−	0	+	+	+
$f(x) - f(1)$	−	0	+	0	+

5.2.



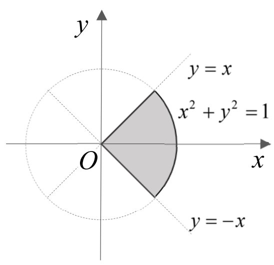
$f_1(x) = f(2x)$ $\quad$ $f_2(x) = f_1(-x) = f(-2x)$ $\quad$ $g(x) = f_2(x) + 4 =$
$= f(-2x) + 4$

Resposta: (D)

6. $x^2 + y^2 \leq 1 \wedge |y| - x \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \wedge |y| \leq x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \leq x \wedge y \geq -x$



Resposta: (A)