

Novo Espaço – Matemática 9.º ano

Proposta de Teste [fevereiro - 2018]

Nome: _____

Ano / Turma: _____ N.º: _____ Data: ____ - ____ - ____



Caderno 1:

(É permitido o uso de calculadora.)

O teste é constituído por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).

Utiliza apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

O teste inclui um formulário e uma tabela trigonométrica.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Formulário

Números

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria

Áreas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Pirâmide e cone: $\frac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Tabela trigonométrica

Graus	Seno	Cosseno	Tangente	Graus	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2708
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1445
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

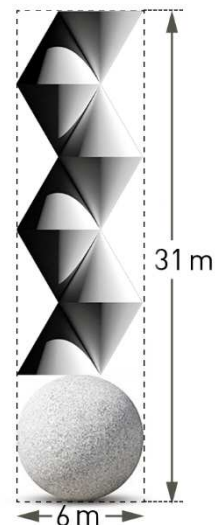
Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Na figura está representada uma escultura constituída por uma esfera e dez cones geometricamente iguais.

Tem em atenção a informação dada na figura, as posições dos cones e que o plano da base do cone inferior é tangente à esfera.

Determina, em metros cúbicos, o volume da escultura.
Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Nota: Se procederes a arredondamentos em cálculos intermédios mantém no mínimo três casas decimais.



2. Na figura está representada uma pirâmide hexagonal regular.

Sabe-se que:

- o volume da pirâmide é igual a 92 cm^3 ;
- a área da base da pirâmide é igual a $8\sqrt{30} \text{ cm}^2$.



Pretende-se calcular, em centímetros, a altura da pirâmide.

As respostas dadas por quatro alunos foram as seguintes:

Alunos	Carolina	Pedro	Gustavo	Daniela
Altura da pirâmide (em cm)	7,2	5,3	6,5	6

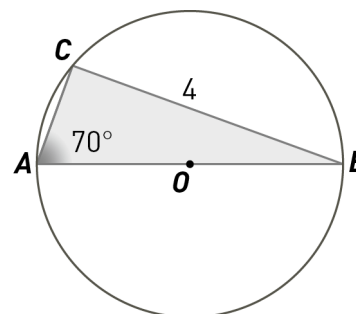
Qual dos alunos apresentou o resultado com menor erro em relação ao valor exato da altura?

- (A) Pedro (B) Daniela (C) Gustavo (D) Carolina

3. Na figura está representado um triângulo retângulo $[ABC]$ inscrito numa circunferência de centro O .

Sabe-se:

- $\overline{BC} = 4$
- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\hat{A}CB = 90^\circ$
- $\hat{B}AC = 70^\circ$



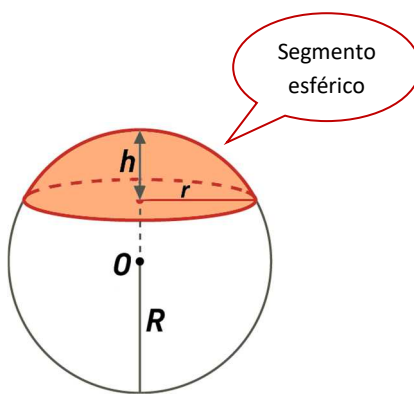
Determina o comprimento da circunferência. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

4. Lê com atenção a informação apresentada a seguir.

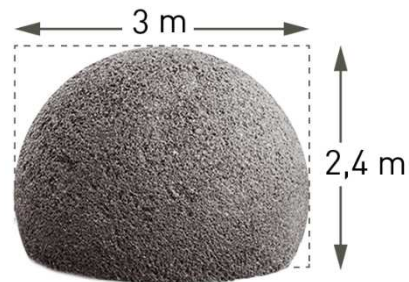
Informação: Um plano quando intersesta uma esfera divide-a em dois segmentos esféricos.

O – centro da esfera
 R – raio da esfera
 h – altura do segmento esférico
 r – raio da base do segmento esférico

O volume, V , de um segmento esférico é dado por:

$$V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3}$$


A seguir apresentam-se uma fotografia de um lago com uma escultura geométrica da qual faz parte um segmento esférico e um esquema desse segmento esférico.



Tendo em atenção os dados apresentados no esquema pode concluir-se que o volume do segmento esférico, em metros cúbicos e arredondado às centésimas, é:

- (A) 12,67 (B) 38,00 (C) 24,74 (D) 80,63

FIM (Caderno 1)

Item				
Cotações (em pontos)				
1.	2.	3.	4.	Total
12	8	12	8	40

Caderno 2:

(Não é permitido o uso de calculadora.)

5. A soma de todos os números inteiros pertencentes ao intervalo $]-\sqrt{5}, \sqrt{20}]$ é:

(A) 6

(B) 7

(C) 10

(D) 13

6. Considera o conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{7x}{5} - \frac{4x-3}{2} > 3 \right\}$.

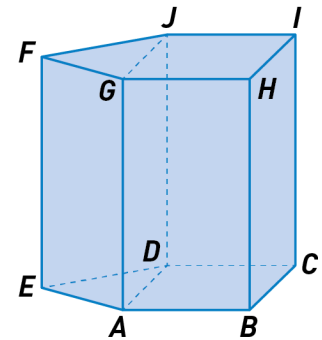
Representa A na forma de intervalo de números reais e indica o menor número inteiro que não pertence a A .

7. Na figura está representado um sólido formado por dois prismas regulares sendo um quadrangular e outro triangular.

7.1. Indica a posição relativa dos planos EAG e HBC .

7.2. Considera a afirmação: "Quaisquer duas retas do espaço que não se intersectam são paralelas."

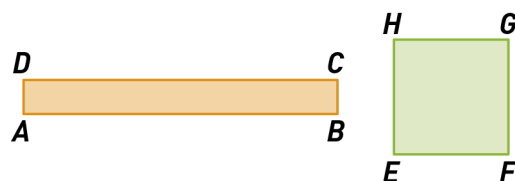
Identifica, recorrendo a letras da figura, duas retas que permitam mostrar que a afirmação é falsa.



8. Na figura estão representados um retângulo $[ABCD]$ e um quadrado $[EFGH]$.

Para um dado número real positivo x , sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4x$
- $\overline{BC} = x + 7$
- $\overline{EF} = 2x + 6$



Determina o valor de x para o qual as áreas do retângulo e do quadrado são iguais e calcula a medida da área de cada figura para esse valor.

9. Na figura está representada uma tenda.

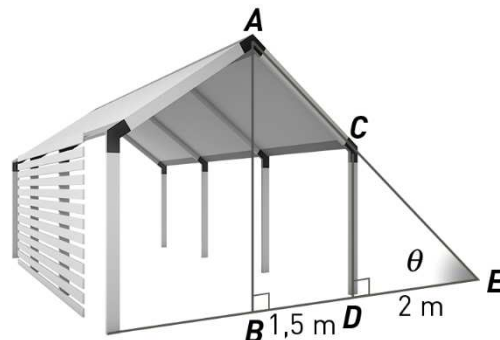
Sabe-se que:

- $\widehat{AEB} = \theta$ e $\tan(\theta) = \frac{6}{5}$;
- $\overline{DE} = 2$ m e $\overline{DB} = 1,5$ m.

Determina:

9.1. o valor exato, em metros, de \overline{AB} ;

9.2. o valor exato de $\cos \theta$.

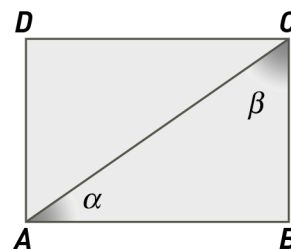


10. Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- $\widehat{BAC} = \alpha$
- $\widehat{ACB} = \beta$

10.1. Prova que $\tan(\alpha) \tan(\beta) = 1$.



10.2. Admite que $\tan(\alpha) = \frac{4}{5}$. É possível determinar \overline{AC} ? Justifica.

Nota: na tua justificação podes recorrer a exemplos.

FIM (Caderno 2)

Item									
Cotações (em pontos)									
5.	6.	7.1.	7.2.	8.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.	Total
4	8	4	4	10	10	10	5	5	60



Caderno 1:

(É permitido o uso de calculadora.)

Formulário

Números

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria

Áreas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Pirâmide e cone: $\frac{\textit{Área da base} \times \textit{Altura}}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1.

Raio da esfera: 3 m

Raio da base de cada cone: 2 m, pois $6:3=2$

Altura de cada cone: 5 m, pois $(31-6):5=5$

$$\text{Volume da esfera: } \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$$

$$\text{Volume de cada cone: } \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 5 = \frac{20\pi}{3}$$

$$\text{Volume da escultura: } 36\pi + 10 \times \frac{20\pi}{3} = \frac{308\pi}{3}$$

Seja V o volume da escultura, $V \approx 322,5 \text{ m}^3$.

Resposta: $322,5 \text{ m}^3$

2. Se h a altura da pirâmide.

$$V = \frac{1}{3}A_b \times h, \text{ ou seja, } 92 = \frac{1}{3} \times 8\sqrt{30} \times h.$$

$$92 = \frac{1}{3} \times 8\sqrt{30} \times h \Leftrightarrow h = \frac{3 \times 92}{8\sqrt{30}}$$

$$h \approx 6,2988$$

Dos valores apresentados, o mais próximo do valor exato é o do Gustavo, ou seja, 6,5.

Reposta: Opção (C) Gustavo

3. $\sin(70^\circ) = \frac{4}{AB}$, ou seja, $\overline{AB} = \frac{4}{\sin(70^\circ)}$.

O raio r da circunferência é dado por: $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{\sin(70^\circ)}$

Comprimento da circunferência: $2\pi r = \frac{4\pi}{\sin(70^\circ)}$

$2\pi r \approx 13,4$

Resposta: 13,4

4. Substituindo os valores adequados na fórmula $V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3}$, tem-se:

$$V = \frac{\pi \times 2,4^2 \times (3 \times 1,5 - 2,4)}{3}$$

$V \approx 12,67 \text{ m}^3$

Resposta: 12,67 m³

FIM (Caderno 1)

Item				
Cotações (em pontos)				
1.	2.	3.	4.	Total
12	8	12	8	40

Caderno 2:

(Não é permitido o uso de calculadora.)

$$5. \{ x \in \mathbb{Z} : -\sqrt{5} < x \leq \sqrt{20} \} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 7$$

Opção (B): 7

$$6. \frac{7x}{5} - \frac{4x-3}{2} > 3 \Leftrightarrow 14x - 20x + 15 > 30 \Leftrightarrow -6x > 15 \Leftrightarrow x < -\frac{15}{6} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$$

$$A = \left] -\infty, -\frac{5}{2} \right[. \text{ O menor número inteiro que não pertence a } A \text{ é } -2 .$$

Resposta: -2

7.

7.1.

Resposta: São planos concorrentes

7.2.

Resposta: Por exemplo, as retas AG e FJ não se intersectam e não são paralelas pois são retas não coplanares.

$$8. 4x(x+7) = (2x+6)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 28x = 4x^2 + 24x + 36 \Leftrightarrow 28x - 24x = 36 \Leftrightarrow 4x = 36 \Leftrightarrow x = 9$$

Tem-se:

$$\overline{AB} = 4 \times 9 = 36 ;$$

$$\overline{BC} = 9 + 7 = 16 ;$$

$$\overline{EF} = 2 \times 9 + 6 = 24$$

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = 36 \times 16 = 576 \quad \text{e} \quad \overline{EF}^2 = 24^2 = 576$$

Resposta: O valor de x é 9 e a medida da área de cada figura é 576.

9.

9.1.

$$\tan(\theta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}, \text{ ou seja, } \frac{6}{5} = \frac{\overline{AB}}{1,5+2} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{6 \times 3,5}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{21}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4,2$$

Resposta: $\overline{AB} = 4,2$ m

9.2.

$$\text{Sabe-se que } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

$$\text{Substituindo, tem-se: } 1 + \frac{36}{25} = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{61}{25} \Leftrightarrow \cos^2(\theta) = \frac{25}{61}.$$

$$\text{Daqui resulta que } \cos(\theta) = \frac{5}{\sqrt{61}}.$$

$$\text{Resposta: } \cos(\theta) = \frac{5}{\sqrt{61}}.$$

10.

$$10.1. \tan(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \text{ e } \tan(\beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

$$\text{Então, } \tan(\alpha)\tan(\beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1. \text{ Tal como se queria provar.}$$

10.2. Com a informação dada, não é possível determinar o valor de \overline{AC} .

- Se $\overline{AB} = 5$ e $\overline{BC} = 4$, tem-se $\tan(\alpha) = \frac{4}{5}$. Neste caso, $\overline{AC} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.
- Se $\overline{AB} = 10$ e $\overline{BC} = 8$, tem-se $\tan(\alpha) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Neste caso, $\overline{AC} = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164}$.

FIM (Caderno 2)

Item									
Cotações (em pontos)									
5.	6.	7.1.	7.2.	8.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.	Total
4	8	4	4	10	10	10	5	5	60