Elementos de Análise Tensorial

Notas para cadeira de Mecânica Aplicada II

F. J. P. Lau & P. J. S. Gil

12 de Fevereiro de 2013

Conteúdo

Lista de Figuras

1 Introdução

A análise tensorial é utilizada com enormes vantagens em Engenharia. A Mecânica dos fluidos e a Mecânica dos Sólidos são áreas onde esta se revela uma ferramenta importante e onde muitos problemas (*i.e.* as equações que descrevem os fenómenos assim como as suas soluções) podem ser simplificados quando resolvidos num sistema de coordenadas adequado. Por exemplo, no cálculo do volume de uma esfera, as suas condições fronteira são imediatas em coordenadas esféricas ($r^2 \leq R^2$), o mesmo não se passando em coordenadas cartesianas ($x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$); a força gravítica em coordenadas esféricas apresenta apenas uma única componente (radial), enquanto que o seu cálculo não é de todo tão simples quando efectuado em coordenadas cartesianas. Como se verá mais tarde, a análise tensorial simplifica estes cálculos, ao esquematizar todo o tipo de transformações e derivadas de vectores, e ao transformar as operações vectoriais em expressões de fácil e clara dedução.

2 Cálculo tensorial

Consideremos um espaço vectorial E de dimensão n e $\underset{j}{\vec{e}} = \{\underset{1}{\vec{e}}, \underset{2}{\vec{e}}, \ldots, \underset{n}{\vec{e}}\}$ uma base desse espaço. Todo o vector $\vec{a} \in E$ pode ser representado na base indicada

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{n} a^j \underset{j}{\vec{e}} = a^j \underset{j}{\vec{e}} \tag{1}$$

em que a^j são as componentes do vector $\vec{a}$ (nessa base). Atente-se na posição que o índice j apresenta nas componentes e nos vectores de base: enquanto o índice das componentes aparece em sobrescrito, os vectores de base serão referenciados por um índice em subscrito. Por razões que serão dadas mais tarde, esta escolha não é aleatória e deve ser respeitada.

Consideremos também as funções lineares $\varepsilon^i(\underset{j}{\vec{e}}) = \delta^i_j$, que nos dão as componentes de um vector:

$$\varepsilon^i(\vec{a}) = \varepsilon^i(a^j \underset{j}{\vec{e}}) = a^j \varepsilon^i(\underset{j}{\vec{e}}) = a^j \delta^i_j = a^i, \tag{2}$$

onde δ^i_j é o símbolo de Kronecker:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

As funções ε^i constituem uma base de um novo espaço vectorial E^*, denominado *espaço dual* de E. Ao espaço E e à sua base dão-se os nomes de *espaço natural* e *base natural*, respectivamente. Qualquer função $f \in E^*$, caracterizada por $f(\underset{j}{\vec{e}}) = f_j$ pode ser escrita na base ε^i,$f = f_i \varepsilon^i$, tendo-se

$$f(\underset{j}{\vec{e}}) = f_i \varepsilon^i (\underset{j}{\vec{e}}) = f_i \delta^i_j = f_j \tag{4}$$

É fácil provar que o espaço dual E^* é um espaço vectorial com a mesma dimensão de E (apresenta inclusive as mesmas propriedades de E, sendo um isomorfismo deste espaço), podendo-se escrever

$$\vec{a} \in E : \vec{a} = a^i \underset{i}{\vec{e}}; \tag{5}$$

$$\vec{f} \in E^* : \vec{f} = f_i \vec{\overset{i}{\varepsilon}}. \tag{6}$$

onde $\vec{\overset{i}{\varepsilon}}(\underset{j}{\vec{e}}) = \delta^i_j$.

Pelo que foi dito atrás, conclui-se que a aplicação de funções lineares a vectores leva à necessidade da utilização de dois espaços vectoriais distintos: o espaço natural E, onde se "situam" os vectores que pretendemos estudar, e o seu espaço dual E^*, em que caracterizamos as funções a aplicar aos vectores. Como já se referiu, estes dois espaços apresentam as mesmas propriedades; através do produto interno, podemos identificar cada função $\vec{v}^*$ de E^* com um vector $\vec{v}$ do espaço natural E, :

$$\vec{v}^*(\vec{a}) = \vec{v} \cdot \vec{a}, \ \forall \vec{a} \in E. \tag{7}$$

A cada vector $\vec{v}^*$ corresponde *um e um só* vector $\vec{v}$. Deste modo, passamos apenas a trabalhar no espaço natural E, ao representar cada vector $\vec{v}^*$ pelo seu correspondente $\vec{v}$.

Para que ambos os vectores $\vec{v}$ e $\vec{v}^*$ tenham as mesmas componentes, define-se uma nova base em E, $\vec{\overset{i}{e}}$ — *base dual de E* (embora seja definida no espaço natural):

$$\vec{v}^* = v^*_i \vec{\overset{i}{\varepsilon}} = v_i \vec{\overset{i}{\varepsilon}}; \tag{8}$$

$$\vec{v} = v_i \vec{\overset{i}{e}}. \tag{9}$$

Contudo o vector $\vec{v}$ continua a poder ser definido na base natural $\underset{i}{\vec{e}}$ por $\vec{v} = v^i \underset{i}{\vec{e}}$; em particular:

$$\vec{v}^*(\underset{j}{\vec{e}}) = \vec{v} \cdot \underset{j}{\vec{e}} \Leftrightarrow v_i \, \vec{\overset{i}{\varepsilon}}(\underset{j}{\vec{e}}) = v_i \, \vec{\overset{i}{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} \Leftrightarrow \delta^i_j = \vec{\overset{i}{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}}. \tag{10}$$

Esta última equação exprime uma regra fundamental da análise tensorial, dado relacionar as duas bases (natural e dual) de qualquer referencial:

$$\vec{\overset{i}{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} = \delta^i_j. \tag{11}$$

A partir deste momento as componentes de cada vector serão designadas conforme a base a que digam respeito:

v^i — componentes contravariantes de $\vec{v}$ (representado por um vector coluna);
v_i — componentes covariantes de $\vec{v}$ (representado por um vector linha).

Os índices das componentes são designadas por *índices covariantes* ou *índices contravariantes*, consoante as componentes sejam covariantes ou contravariantes, respectivamente. Os índices contravariantes encontram-se sempre representados em sobrescrito ("em cima") enquanto que os índices covariantes representam-se sempre em subscrito ("em baixo").

2.1 Significado geométrico das componentes contravariantes e covariantes

Em $\Re^2$, as componentes de um vector numa dada base são dadas pela sua decomposição vectorial, onde se traçam paralelas a um vector de base e a intersecção destas com o outro vector de base indica cada componente; é o que se designa usualmente por *regra do paralelogramo.* O mesmo pode ser efectuado para as componentes contravariantes de um vector, a partir de paralelas aos vectores de base natural; como se observará mais tarde estas paralelas são perpendiculares aos vectores da base dual.

Exemplo 1. considere-se um referencial não ortogonal e não normado, e um vector $\vec{v}$ caracterizado nesse referencial (figura 1):

$$\vec{v} = v^1 \underset{1}{\vec{e}} + v^2 \underset{2}{\vec{e}},$$

com $\|\underset{1}{\vec{e}}\| = 1$, $\|\underset{2}{\vec{e}}\| = 2$. As componentes contravariantes são calculadas indirectamente pela decomposição vectorial de $\vec{v}$ na direcção dos vectores de base (usando a regra do paralelogramo):

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{OP}^{\,1}\| = |v^1|\ \|\underset{1}{\vec{e}}\| \\ \|\overrightarrow{OP}^{\,2}\| = |v^2|\ \|\underset{2}{\vec{e}}\| \end{cases} \Rightarrow v^i = \pm \frac{\|\overrightarrow{OP}^{\,i}\|}{\|\underset{i}{\vec{e}}\|}.$$

Os vectores de base dual podem ser calculados pela relação fundamental (11):

$$\overset{i}{\vec{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} = \delta^i_j \Rightarrow \begin{cases} \overset{1}{\vec{e}} \cdot \underset{2}{\vec{e}} = \overset{2}{\vec{e}} \cdot \underset{1}{\vec{e}} = 0 \Rightarrow \overset{1}{\vec{e}} \perp \underset{2}{\vec{e}}; \overset{2}{\vec{e}} \perp \underset{1}{\vec{e}}; \\ \overset{1}{\vec{e}} \cdot \underset{1}{\vec{e}} = \overset{2}{\vec{e}} \cdot \underset{2}{\vec{e}} = 1 \Rightarrow \|\overset{i}{\vec{e}}\| \|\underset{i}{\vec{e}}\| \sin(\pi/3) = 1 \Leftrightarrow \|\overset{i}{\vec{e}}\| = \left[\|\underset{i}{\vec{e}}\| \sin(\pi/3)\right]^{-1} \end{cases}$$

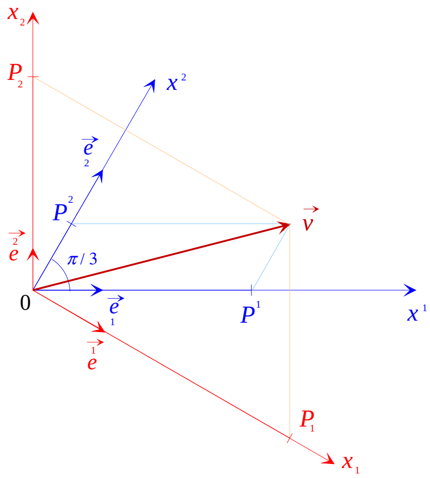


Figura 1: Referencial não ortonormado.

tendo-se então:

$$\|\overset{1}{\vec e}\| = 2/\sqrt{3} \simeq 1.2;\ \|\overset{2}{\vec e}\| = 1/\sqrt{3} \simeq 0.6$$

As componentes covariantes podem ser calculadas da mesma forma:

$$\vec v = v_1 \overset{1}{\vec e} + v_2 \overset{2}{\vec e} \Rightarrow \begin{cases} \|\overrightarrow{OP}_1\| = |v_1|\ \|\overset{1}{\vec e}\| \\ \|\overrightarrow{OP}_2\| = |v_2|\ \|\overset{2}{\vec e}\| \end{cases} \Rightarrow v_i = \pm \frac{\|\overrightarrow{OP}_i\|}{\|\overset{i}{\vec e}\|}$$

No caso particular (mas extremamente usual) do referencial ser ortonormado (figura 2), conclui-se facilmente que as duas bases coincidem, o mesmo acontecendo então com as componentes contravariantes e covariantes:

$$\begin{cases} \underset{1}{\vec e} \perp \underset{2}{\vec e} \\ \|\underset{1}{\vec e}\| = \|\underset{2}{\vec e}\| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{1}{\vec e} \equiv \underset{1}{\vec e};\ \overset{2}{\vec e} \equiv \underset{2}{\vec e} \\ v^1 \equiv v_1;\ v^2 \equiv v_2 \end{cases}$$

O caso acima referido descreve a utilização de um referencial cartesiano na resolução de problemas, em que não se distingue os dois referenciais e, portanto, tal notação não é importante. É quando se "sai" do referencial cartesiano e se começam a utilizar outros tipos de referenciais (*e.g.* polares, cilíndricos, esféricos) que a utilização da formulação tensorial se torna essencial.

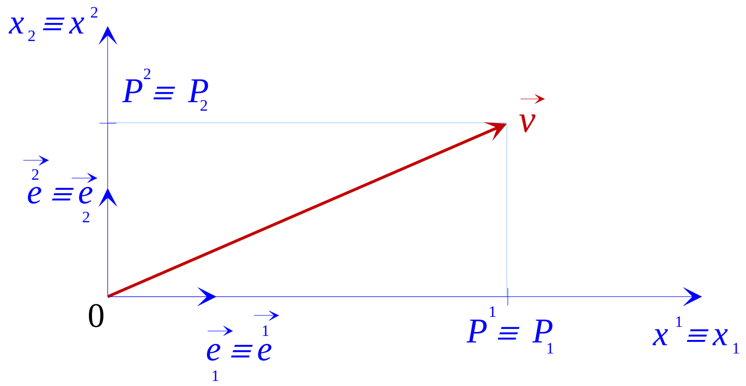


Figura 2: Referencial ortonormado.

2.2 Transformações não lineares

Consideremos como exemplo as coordenadas polares, definidas pela transformação:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta; \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{12}$$

Verifica-se facilmente que ao variar a coordenada r, com a coordenada θ fixa, estamos a deslocar-nos ao longo de uma recta de inclinação θ, que passa pela origem: $y/x = \tan\theta \Leftrightarrow y = x\tan\theta$ (*vide* figura 3); do mesmo modo, a curva que se obtém quando se varia θ (mantendo-se fixa a coordenada r) corresponde a uma circunferência de raio r, centrada na origem: $x^2+y^2 = r^2$. De uma forma genérica, temos a definição de *curva coordenada* x^i : curva que se obtém quando se varia a coordenada x^i (e todas as outras se mantêm constantes).

As curvas coordenadas estão definidas em todos os pontos do espaço: no ponto $(r = 2, \theta = \pi/3)$, as curvas coordenadas r e θ serão dadas por $y = x\sqrt{3}$ e $x^2 + y^2 = 4$, respectivamente. Um exemplo muito simples de curva coordenada pode-se encontrar nas coordenadas cartesianas: ao manter a coordenada x constante e ao variar y, estamos a definir uma recta vertical — curva coordenada y ou eixo coordenado y; o mesmo pode ser dito em relação ao eixo coordenado x.

O raciocínio atrás elaborado pode ser generalizado para o caso em que apenas uma coordenada é mantida constante: temos então a definição de *superfície coordenada* x^i. Para as coordenadas cartesianas, a superfície coordenada z consiste no plano $z =$ const.

2.2.1 Leis de transformação

Voltemos ao caso anterior das coordenadas polares. A variação incremental de $\vec{r}$ ao longo de $\underset{r}{\vec{e}}$ pode ser dada em função dos vectores de base do novo referencial ou do antigo:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r \; \underset{r}{\vec{e}} = \mathrm{d}x \; \underset{x}{\vec{e}} + \mathrm{d}y \; \underset{y}{\vec{e}} = \mathrm{d}x^i \; \underset{i}{\vec{e}}. \tag{13}$$

Como $\mathrm{d}r = (\partial r / \partial x^j)\, \mathrm{d}x^j$, temos

$$\frac{\partial r}{\partial x^j}\, \mathrm{d}x^j \; \underset{r}{\vec{e}} = \mathrm{d}x^i \; \underset{i}{\vec{e}} \Rightarrow \underset{r}{\vec{e}} = \frac{\partial x^j}{\partial r} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^j} \; \underset{i}{\vec{e}} = \frac{\partial x^j}{\partial r} \delta^i_j \; \underset{i}{\vec{e}}; \tag{14}$$

Podemos então escrever a relação entre $\underset{r}{\vec{e}}$ e os vectores naturais do referencial inicial:

$$\underset{r}{\vec{e}} = \frac{\partial x^i}{\partial r} \underset{i}{\vec{e}}. \tag{15}$$

O mesmo raciocínio pode ser desenvolvido para θ:

$$\underset{\theta}{\vec{e}} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \underset{i}{\vec{e}}, \tag{16}$$

tendo-se, de uma forma geral:

$$\underset{i'}{\vec{e}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \; \underset{i}{\vec{e}} = X^i_{i'} \; \underset{i}{\vec{e}}. \tag{17}$$

onde $X^i_{i'} = \partial x^i / \partial x^{i'}$ é a *matriz das derivadas parciais — matriz de transformação inversa*. Repare-se que o índice de cima representa sempre o índice linha, sendo o índice de baixo o índice coluna, na representação matricial. Como qualquer vector pode ser representado nos dois referenciais $\vec{v} = v^i \underset{i}{\vec{e}} = v^{i'} \underset{i'}{\vec{e}}$,

$$v^i \underset{i}{\vec{e}} = v^{i'} \left(X^i_{i'} \underset{i}{\vec{e}} \right) = X^i_{i'} v^{i'} \underset{i}{\vec{e}} \Rightarrow v^i = X^i_{i'} v^{i'}, \tag{18}$$

podemos escrever a lei de transformação das *componentes contravariantes*:

$$v^{i'} = X^{i'}_i \; v^i, \tag{19}$$

onde $X^{i'}_i = \partial x^{i'} / \partial x^i = [X^i_{i'}]^{-1}$ é definida também como uma matriz de derivadas parciais (inversa da matriz $X^i_{i'}$) — *matriz de transformação directa.* Note-se que o novo sistema de coordenadas caracterizado por (17) ou (19) tem de se encontrar bem definido; ou seja, o determinante da matriz de transformação directa (ou inversa) não pode ser nulo, ou tomar o valor infinito:

$$\det(X^{i'}_i) \neq 0, \infty. \tag{20}$$

O produto interno entre dois vectores

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{u} &= v_i\overset{i}{\vec{e}}\cdot u^j\underset{j}{\vec{e}} = v_i u^j\left(\overset{i}{\vec{e}}\cdot\underset{j}{\vec{e}}\right) = v_i u^j\delta^i_j = v_i u^i \\
&= v_{i'}\overset{i'}{\vec{e}}\cdot u^{j'}\underset{j'}{\vec{e}} = v_{i'} u^{j'}\left(\overset{i'}{\vec{e}}\cdot\underset{j'}{\vec{e}}\right) = v_{i'} u^{j'}\delta^i_j = v_{i'} u^{i'},
\end{aligned}
$$

permite-nos determinar a relação entre as *componentes covariantes* através da igualdade

$$v_i u^i = v_{i'}u^{i'} \Leftrightarrow v_i u^i = v_{i'}X^{i'}_i u^i \Rightarrow v_i = X^{i'}_i v_{i'} \Leftrightarrow v_{i'} = X^i_{i'}\, v_i. \tag{21}$$

Resta deduzir a lei de transformação dos vectores de base dual; da identidade $\vec{v} = v_i\,\overset{i}{\vec{e}} = v_{i'}\,\overset{i'}{\vec{e}}$, temos

$$v_i\,\overset{i}{\vec{e}} = X^i_{i'}\, v_i\,\overset{i'}{\vec{e}} \Rightarrow \overset{i}{\vec{e}} = X^i_{i'}\,\overset{i'}{\vec{e}} \Leftrightarrow \overset{i'}{\vec{e}} = X^{i'}_i\,\overset{i}{\vec{e}}. \tag{22}$$

Estamos agora em condições de explicar a razão do nome dado às componentes:

- *Componentes covariantes:* têm a mesma lei de transformação dos vectores de base naturais $\underset{i}{\vec{e}}$;

- *Componentes contravariantes:* transformam-se através da transformação inversa (contrária) dos vectores de base naturais $\underset{i}{\vec{e}}$.

No caso particular das coordenadas polares, a matriz de transformação inversa é dada por:

$$X^i_{i'} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{23}$$

pelo que os vectores de base natural das coordenadas polares, apresentam as seguintes componentes, na base cartesiana:

$$\underset{i'}{\vec{e}} = X^i_{i'}\,\underset{i}{\vec{e}} \Rightarrow \begin{cases} \underset{1'}{\vec{e}} = X^i_{1'}\,\underset{i}{\vec{e}} = X^1_{1'}\,\underset{1}{\vec{e}} + X^2_{1'}\,\underset{2}{\vec{e}} = \cos\theta\,\underset{1}{\vec{e}} + \sin\theta\,\underset{2}{\vec{e}} \equiv \underset{r}{\vec{e}} \\ \\ \underset{2'}{\vec{e}} = X^i_{2'}\,\underset{i}{\vec{e}} = X^1_{2'}\,\underset{1}{\vec{e}} + X^2_{2'}\,\underset{2}{\vec{e}} = r\left(-\sin\theta\,\underset{1}{\vec{e}} + \cos\theta\,\underset{2}{\vec{e}}\right) \equiv \underset{\theta}{\vec{e}} \end{cases} \tag{24}$$

em que $\underset{1}{\vec{e}} \equiv \underset{x}{\vec{e}}$, $\underset{2}{\vec{e}} \equiv \underset{y}{\vec{e}}$. Para o cálculo dos novos vectores de base dual, basta calcular a matriz de transformação directa, ou seja a inversa da matriz $X^i_{i'}$:

$$X^{i'}_i = \left[X^i_{i'}\right]^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{25}$$

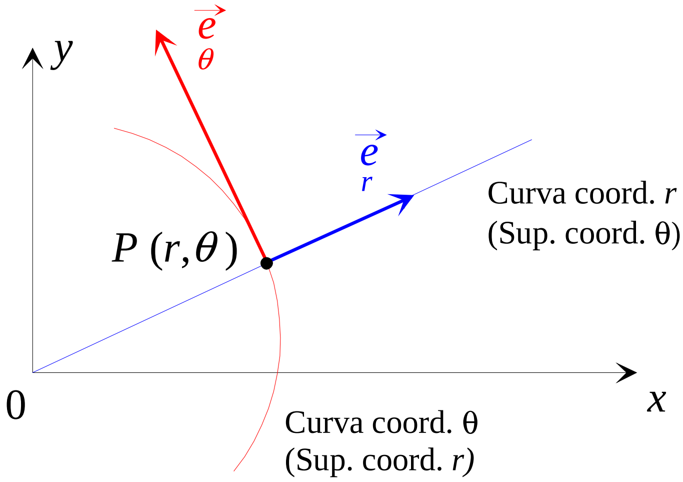


Figura 3: Coordenadas polares

tendo-se finalmente:

$$\overset{\vec{i'}}{e} = X^{i'}_{i}\, \overset{\vec{i}}{e} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\vec{r}}{e} = X^{1'}_{i}\, \overset{\vec{i}}{e} = X^{1'}_{1}\, \overset{\vec{1}}{e} + X^{1'}_{2}\, \overset{\vec{2}}{e} = \cos\theta\, \overset{\vec{1}}{e} + \sin\theta\, \overset{\vec{2}}{e} \\ \\ \overset{\vec{\theta}}{e} = X^{2'}_{i}\, \overset{\vec{i}}{e} = X^{2'}_{1}\, \overset{\vec{1}}{e} + X^{2'}_{2}\, \overset{\vec{2}}{e} = \frac{1}{r}\left(-\sin\theta\, \overset{\vec{1}}{e} + \cos\theta\, \overset{\vec{2}}{e}\right) \end{cases} \tag{26}$$

Como se pode constatar facilmente (figura 3), o vector de base natural $\underset{\theta}{\vec{e}}$ é tangente à circunferência de raio r, no ponto de coordenadas (r, θ); do mesmo modo, o vector de base natural $\underset{r}{\vec{e}}$ apresenta um declive dado por $\tan\theta = y/x$. De um modo geral, os vectores de base apresentam as seguintes propriedades:

- Os vectores de base natural são tangentes à curva coordenada respectiva;
- Os vectores de base dual são ortogonais à superfície coordenada dada pelo mesmo índice.

Num espaço a duas dimensões (x^1,x^2) a curva coordenada x^1 coincide necessariamente com a superfície coordenada x^2 — a superfície coordenada resume-se a uma curva, no plano x^1x^2 — pelo que cada vector de base natural (dual) é sempre tangente (perpendicular) à respectiva curva coordenada (à curva coordenada oposta), como se pode observar na figura 4.

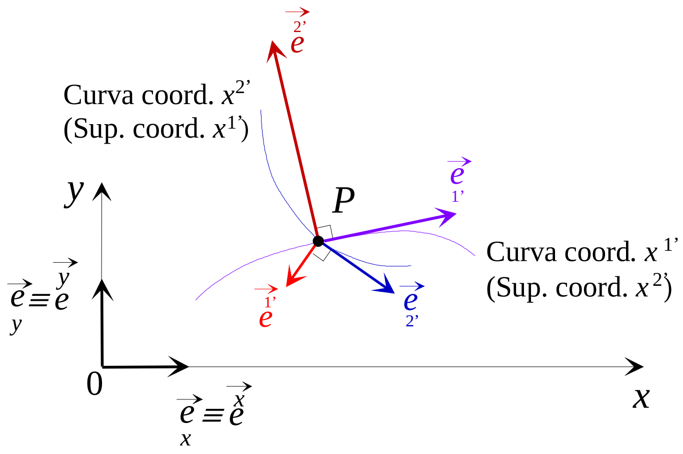


Figura 4: Coordenadas curvilíneas

2.2.2 Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas representam apenas uma extensão natural das coordenadas polares para três dimensões, em que a coordenada z não é alterada; são definidas usualmente pela sua transformação inversa:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta; \\ y = r\sin\theta; \\ z = z. \end{cases} \tag{27}$$

Caso seja necessário, pode-se sempre utilizar a transformação directa, definida pelas relações:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; & \text{(28a)} \\ \theta = \arctan{(y/x)}; & \text{(28b)} \\ z = z. & \text{(28c)} \end{cases}$$

Estas últimas equações (28a-c) permitem deduzir facilmente as curvas coordenadas e, consequentemente, as superfícies coordenadas (figura 5): ao manter a coordenada z constante, e variando as coordenadas r e θ, obtém-se um plano horizontal de cota z — superfície coordenada z; da mesma forma a variação de z e θ com r fixo (28a), permite definir um cilindro vertical de raio r, centrado no eixo z (superfície coordenada r); finalmente ao igualar (28b) a uma constante, e ao permitir a variação de r e z, temos uma plano vertical que contém o eixo z, de inclinação $\theta = \arctan{(y/z)}$ — superfície coordenada θ. As superfícies coordenadas são dadas pelas intersecção das superfícies coordenadas das outras coordenadas: por exemplo, a curva coordenada θ (uma circunferência horizontal) resulta da intersecção das superfícies coordenadas r e z (figura 6).

A matriz de transformação inversa é calculada como anteriormente:

$$X^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \theta & \partial x/\partial z \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \theta & \partial y/\partial z \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial \theta & \partial z/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

pelo que os vectores de base natural são dados pelas expressões:

$$\underset{i'}{\vec{e}} = X^i_{i'}\,\underset{i}{\vec{e}} \Rightarrow \begin{array}{l} \underset{r}{\vec{e}} = X^i_{1'}\,\underset{i}{\vec{e}} = X^1_{1'}\,\underset{1}{\vec{e}} + X^2_{1'}\,\underset{2}{\vec{e}} + X^3_{1'}\,\underset{3}{\vec{e}} \equiv (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \underset{\theta}{\vec{e}} = X^i_{2'}\,\underset{i}{\vec{e}} = X^1_{2'}\,\underset{1}{\vec{e}} + X^2_{2'}\,\underset{2}{\vec{e}} + X^3_{2'}\,\underset{3}{\vec{e}} \equiv r\,(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \underset{z}{\vec{e}} = X^i_{3'}\,\underset{i}{\vec{e}} = X^1_{3'}\,\underset{1}{\vec{e}} + X^2_{3'}\,\underset{2}{\vec{e}} + X^3_{3'}\,\underset{3}{\vec{e}} \equiv (0, 0, 1) \end{array} \tag{30}$$

Generalizando o raciocínio para os vectores de base dual, conclui-se que estes são também semelhantes aos vectores de base dual do referencial polar, bastando acrescentar um dimensão (cuja componente é nula) aos respectivos vectores duais r e θ; o vector dual z coincide com seu natural $\underset{z}{\vec{e}}$:

$$\begin{cases} \overset{\vec{r}}{e} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \overset{\vec{\theta}}{e} = \frac{1}{r}\,(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \overset{\vec{z}}{e} = (0, 0, 1) \end{cases} \tag{31}$$

Exemplo 2. Consideremos a transformação de coordenadas:

$$x^{i'} = X^{i'}_i x^i \text{ com } X^{i'}_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

e a sua transformação inversa:

$$x^i = X^i_{i'} x^{i'} \text{ com } X^i_{i'} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Assumindo que o referencial x^i é o referencial cartesiano, temos

$$\underset{i'}{\vec{e}} = X^i_{i'}\,\underset{i}{\vec{e}} = \underbrace{X^1_{i'}\,\underset{1}{\vec{e}} + X^2_{i'}\,\underset{2}{\vec{e}}}_{\substack{\text{colunas da} \\ \text{matriz } X^i_{i'}}} \Rightarrow \begin{cases} \underset{1'}{\vec{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ \underset{2'}{\vec{e}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

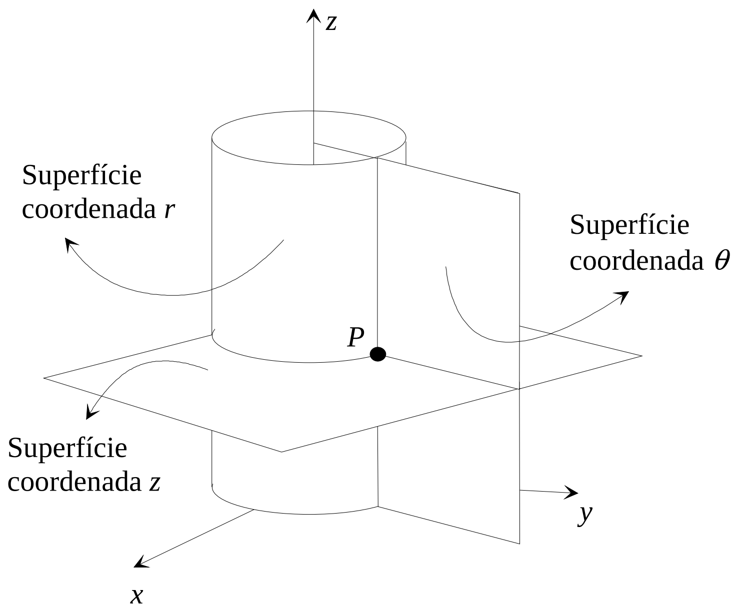


Figura 5: Superfícies coordenadas no Referencial cilíndrico.

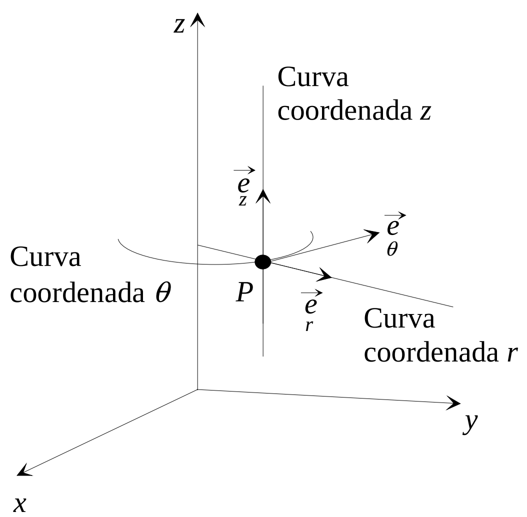


Figura 6: Curvas coordenadas no Referencial cilíndrico.

$$\overset{\overset{\rightarrow}{i'}}{e} = X^{i'}_i \overset{\vec{i}}{e} = \underbrace{X^{i'}_1 \overset{\overset{\rightarrow}{1}}{e} + X^{i'}_2 \overset{\overset{\rightarrow}{2}}{e}}_{\substack{\text{linhas da}\\ \text{matriz } X^{i'}_i}} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\overset{\rightarrow}{1'}}{e} = \begin{pmatrix}1/2 & 1\end{pmatrix} \\ \\ \overset{\overset{\rightarrow}{2'}}{e} = \begin{pmatrix}-1/2 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$$

Um vector $\vec{v} = \underset{1}{\vec{e}} + \underset{2}{\vec{e}}$ $(= \overset{\overset{\rightarrow}{1}}{e} + \overset{\overset{\rightarrow}{2}}{e}$) pode ser representado pelas componentes contravariantes e covariantes:

$$v^i = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \quad v_i = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix};$$

no novo referencial, as componentes do vector $\vec{v}$ são dadas por:

2.3 Vectores de base: nova definição

Uma das grandes vantagens da utilização do cálculo tensorial na formulação de problemas mecânicos, consiste em não termos de utilizar a notação vectorial: cada vector $\vec{v}$ passa assim a ser representado pelas suas componentes v^i ou v_i. Contudo, continua a ser necessário, em alguns casos, exprimir os vectores de base (nomeadamente, quando temos de calcular as suas derivadas, como veremos mais tarde). Surgiu então a ideia de representar cada vector de base em função da sua própria base (ou eventualmente, da base do referencial inicial, quando se aplicou uma transformação de coordenadas):

$$\underset{i'}{\vec{e}} = \underset{i'}{e}^{j'} \underset{j'}{\vec{e}} = \underset{i'}{e}^{j} \underset{j}{\vec{e}} \tag{32}$$

onde se utilizaram novas definições:

$\underset{i'}{e}^{j'}$ — componentes dos vectores de base natural do referencial $x^{i'}$, escritas à custa dos vectores de base do próprio referencial $x^{i'}$;

$\underset{i'}{e}^{j}$ — componentes (contravariantes) dos vectores de base natural do referencial $x^{i'}$, escritas no referencial x^i.

Por exemplo, $\underset{1'}{e}^{2'}$ representa a segunda componente do vector $\underset{1'}{\vec{e}}$, dado na sua própria base.

Verifica-se facilmente que existe uma relação[1] entre as componentes atrás definidas e as matrizes de transformação:

[1] Utilizou-se "$*$" na igualdade, dado esta não ser uma igualdade matemática: estamos a igualar colunas de uma matriz com vários vectores coluna.

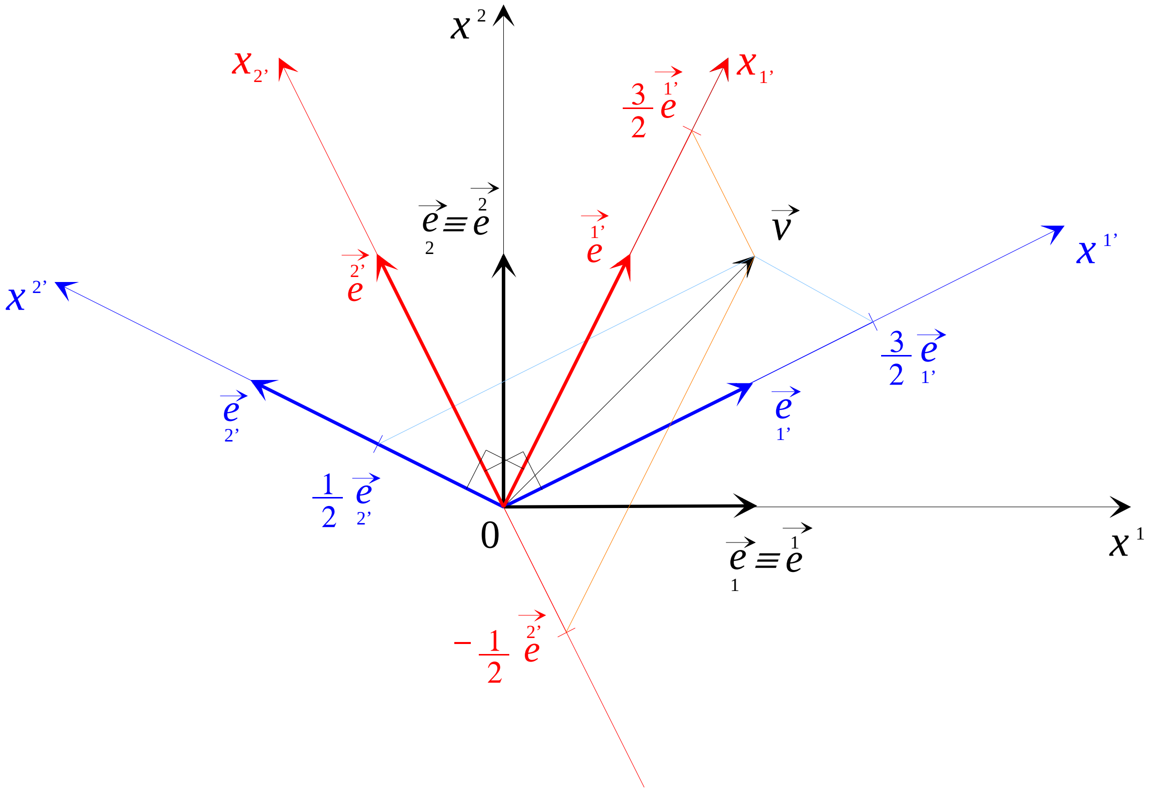


Figura 7: Representação gráfica do vector $\vec{v}$.

$$\underset{i'}{e}^{j} \stackrel{*}{=} X^{j}_{i'} \to \text{ vectores coluna da matriz inversa } X^{i}_{i'}$$
$$\underset{i'}{e}^{j'} \stackrel{*}{=} X^{j'}_{i'} = \delta^{j'}_{i'} \quad \left(\underset{1'}{\vec{e}} = 1\,\underset{1'}{\vec{e}} + 0\,\underset{2'}{\vec{e}} + \dots\right)$$

De igual modo, as componentes dos vectores de base dual são dadas por:

$$\overset{\vec{i'}}{e} = \overset{i'}{e}_{j}\,\overset{\vec{j}}{e} = \overset{i'}{e}_{j'}\,\overset{\vec{j'}}{e} \tag{33}$$

onde se define:

$\overset{i'}{e}_{j}$ — componentes (covariantes) dos vectores de base dual do referencial $x^{i'}$, escritas no referencial x^{i};

$\overset{i'}{e}_{j'}$ — componentes dos vectores de base dual do referencial $x^{i'}$, escritas à custa dos vectores de base do próprio referencial $x^{i'}$.

Temos também a identificação:

$$\overset{i'}{e}_j \stackrel{*}{=} X^{i'}_j \rightarrow \text{ vectores linha da matriz directa } X^{i'}_i$$
$$\overset{i'}{e}_{j'} \stackrel{*}{=} X^{i'}_{j'} = \delta^{i'}_{j'}$$

No exemplo anterior, obtém-se facilmente as componentes dos vectores de base, usando as novas definições:

$$\underset{1'}{e}^j = X^j_{1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \equiv \underset{1'}{\vec{e}}; \qquad \underset{2'}{e}^j = X^j_{2'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \equiv \underset{2'}{\vec{e}};$$

$$\overset{1'}{e}_j = X^{1'}_j = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \overset{\vec{1'}}{e}; \quad \overset{2'}{e}_j = X^{2'}_j = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \overset{\vec{2'}}{e}.$$

3 Métrica

O produto interno entre dois vectores pode ser calculado facilmente, se utilizarmos as duas bases (natural e dual) na representação dos dois vectores:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a^i \underset{i}{\vec{e}} \cdot b_j \overset{\vec{j}}{e} = a^i\, b_j\, \underset{i}{\vec{e}} \cdot \overset{\vec{j}}{e} = a^i\, b_j\, \delta^j_i = a^i\, b_i \\ &= a_i \overset{\vec{i}}{e} \cdot b^j \underset{j}{\vec{e}} = a_i\, b^j\, \overset{\vec{i}}{e} \cdot \underset{j}{\vec{e}} = a_i\, b^j\, \delta^i_j = a_i\, b^i. \end{aligned}$$

O mesmo não se passa com o produto interno quando os dois vectores estão definidos na mesma base, pois não se sabe de antemão qual o valor do produto interno entre vectores de igual variância:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} a^i \underset{i}{\vec{e}} \cdot b^j \underset{j}{\vec{e}} = a^i\, b^j\, \underset{i}{\vec{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} \Rightarrow \underset{i}{\vec{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} = ? \\ \\ a_i \overset{\vec{i}}{e} \cdot b_j \overset{\vec{j}}{e} = a_i\, b_j\, \overset{\vec{i}}{e} \cdot \overset{\vec{j}}{e} \Rightarrow \overset{\vec{i}}{e} \cdot \overset{\vec{j}}{e} = ? \end{cases}$$

A regra tão conhecida para o cálculo do produto interno de dois vectores, em que o produto interno é dado pela soma dos produtos das componentes, só é válida num referencial em que os vectores de base natural sejam ortogonais, e em que a sua norma seja unitária:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = a^i\, b^j\, \underset{i}{\vec{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} &= a^1\, b^1\, \underset{1}{\vec{e}} \cdot \underset{1}{\vec{e}} + a^1\, b^2\, \underset{1}{\vec{e}} \cdot \underset{2}{\vec{e}} + a^1\, b^3\, \underset{1}{\vec{e}} \cdot \underset{3}{\vec{e}} + \ldots \\ &= a^1 \times b^1 \times 1 + a^1 \times b^2 \times 0 + a^1 \times b^3 \times 0 + \ldots = a^1\, b^1 + a^2\, b^2 + a^3\, b^3. \quad (34) \end{aligned}$$

De uma modo geral, tornou-se necessário definir uma nova grandeza — *métrica* — que corresponde ao produto interno de vectores de base natural (*métrica covariante*) e dual (*métrica contravariante*):

$$\text{Matriz métrica contravariante — } \quad g^{ij} = \overset{\vec{i}}{e} \cdot \overset{\vec{j}}{e} \tag{35}$$

$$\text{Matriz métrica covariante — } \quad g_{ij} = \underset{i}{\vec{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} \tag{36}$$

Repare-se que, em qualquer referencial ortonormado (em que os vectores de base são ortogonais e apresentam norma unitária) as métricas são idênticas entre si e iguais à matriz unidade:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{i}{\vec{e}} \perp \underset{j}{\vec{e}} \\ \| \underset{i}{\vec{e}} \| = 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \underset{i}{\vec{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} = \delta_{ij} \Leftrightarrow g_{ij} = \delta_{ij} \text{ (e da mesma forma: } g^{ij} = \delta^{ij}\text{).}$$

3.1 Propriedades e características

A métrica apresenta algumas propriedades, que se vão revelar extremamente úteis nos cálculos posteriores, nomeadamente:

- as duas métricas são simétricas: $g_{ij} = g_{ji}$; $g^{ij} = g^{ji}$;
- permitem o cálculo das componentes covariantes de um vector a partir das componentes contravariantes (descida de índices):

$$\left. \begin{array}{rl} \vec{a} \cdot \underset{i}{\vec{e}} = & a^j \, \underset{j}{\vec{e}} \cdot \underset{i}{\vec{e}} = a^j \, g_{ji} = a^j \, g_{ij} \\ = & a_j \, \overset{\vec{j}}{e} \cdot \underset{i}{\vec{e}} = a_j \, \delta^j_i = a_i \end{array} \right\} \Rightarrow a_i = g_{ij} \, a^j;$$

- assim como o inverso (subida de índices):

$$\left. \begin{array}{rl} \vec{a} \cdot \overset{\vec{i}}{e} = & a_j \, \overset{\vec{j}}{e} \cdot \overset{\vec{i}}{e} = a_j \, g^{ji} = a_j \, g^{ij} \\ = & a^j \, \underset{j}{\vec{e}} \cdot \overset{\vec{i}}{e} = a^j \, \delta^i_j = a^i \end{array} \right\} \Rightarrow a^i = g^{ij} \, a_j;$$

- a matriz métrica covariante é inversa da matriz métrica contravariante (e vice-versa):

$$a_j \, g^{ij} = a^i \Leftrightarrow g_{jk} \, a^k \, g^{ij} = \delta^i_k \, a^k \Rightarrow g^{ij} \, g_{jk} = \delta^i_k.$$

O cálculo da métrica covariante num novo referencial pode ser sempre efectuado a partir da métrica (covariante) do antigo referencial:

$$g_{i'j'} = \underset{i'}{\vec{e}} \cdot \underset{j'}{\vec{e}} = X^i_{i'} \underset{i}{\vec{e}} \cdot X^j_{j'} \underset{j}{\vec{e}} = X^i_{i'} X^j_{j'} \underset{i}{\vec{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} \Rightarrow g_{i'j'} = X^i_{i'} X^j_{j'} g_{ij}; \tag{37}$$

o mesmo se pode dizer da métrica contravariante:

$$g^{i'j'} = \overset{i'}{\vec{e}} \cdot \overset{j'}{\vec{e}} = X^{i'}_i \overset{i}{\vec{e}} \cdot X^{j'}_j \overset{j}{\vec{e}} = X^{i'}_i X^{j'}_j \overset{i}{\vec{e}} \cdot \overset{j}{\vec{e}} \Rightarrow g^{i'j'} = X^{i'}_i X^{j'}_j g^{ij}; \tag{38}$$

Utilizando a definição de g para o determinante da matriz métrica covariante $g = \det(g_{ij})$, e de X para o determinante da matriz de transformação directa $X^{i'}_i$, temos:

$$\det(g_{i'j'}) = \det(X^i_{i'}) \det(X^i_{j'}) \det(g_{ij}) \Rightarrow g' = X^{-2} g \tag{39}$$

O elemento de arco ($\mathrm{d}S^2$) fica definido em qualquer referencial pela relação:

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = (\,\mathrm{d}x^i \underset{i}{\vec{e}}) \cdot (\,\mathrm{d}x^j \underset{j}{\vec{e}}) = (\underset{i}{\vec{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}})\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \Rightarrow \mathrm{d}S^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j. \tag{40}$$

Num referencial ortonormado, temos $g_{ij} = \delta_{ij}$, pelo que o elemento de arco é dado pela equação já conhecida:

$$\mathrm{d}S^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = (\,\mathrm{d}x\,)^2 + (\,\mathrm{d}y\,)^2 + (\,\mathrm{d}z\,)^2 + \dots$$

Exemplo 3. Para o caso já estudado das coordenadas polares, as matrizes das métricas covariantes e contravariantes podem ser calculadas por quaisquer das relações acima dadas. Dados os vectores de base natural (24), é possível calcular a métrica covariante através da sua definição (36):

$$g_{i'j'} = \underset{i'}{\vec{e}} \cdot \underset{j'}{\vec{e}} = \begin{pmatrix} (\underset{1'}{\vec{e}} \cdot \underset{1'}{\vec{e}}) & (\underset{1'}{\vec{e}} \cdot \underset{2'}{\vec{e}}) \\ (\underset{2'}{\vec{e}} \cdot \underset{1'}{\vec{e}}) & (\underset{2'}{\vec{e}} \cdot \underset{2'}{\vec{e}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underset{r}{\vec{e}} \cdot \underset{r}{\vec{e}}) & (\underset{r}{\vec{e}} \cdot \underset{\theta}{\vec{e}}) \\ (\underset{\theta}{\vec{e}} \cdot \underset{r}{\vec{e}}) & (\underset{\theta}{\vec{e}} \cdot \underset{\theta}{\vec{e}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Note-se que a métrica é dada por uma matriz diagonal: como o referencial é ortogonal, o produto interno de dois vectores de base natural é nulo, a não ser que sejam idênticos (*i.e.* elementos da diagonal da matriz da métrica covariante).

A matriz da métrica contravariante podia ser calculada do mesmo modo, ou pela lei de transformação tensorial da métrica contravariante (38); contudo, sempre que a métrica covariante é dada por uma matriz diagonal, a sua inversa é imediata:

$$g^{i'j'} = (g_{i'j'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}.$$

4 Tensores: lei de transformação tensorial

Nos capítulos anteriores, desenvolvemos algumas técnicas que nos permitem conhecer o valor das componentes de algumas multiplicidades de ordem 1 (vectores), ordem 2 (matrizes das métricas) e de ordem 0 (determinante da métrica) num novo referencial, caracterizado por $v^{i'} = X^{i'}_i \, v^i$:

- O vector de componentes contravariantes $\vec{v} = v^i \, \underset{i}{\vec{e}}$ (vector contravariante) passa a ser dado por $\vec{v} = v^{i'} \underset{i'}{\vec{e}}$, onde $v^{i'} = X^{i'}_i \, v^i$;
- O vector de componentes covariantes $\vec{v} = v_i \, \overset{\vec{i}}{e}$ (vector covariante) passa a ser dado por $\vec{v} = v_{i'} \overset{\vec{i'}}{e}$, onde $v_{i'} = X^i_{i'} \, v_i$;
- As métricas contravariante e covariante obedecem às leis de transformação:

$$
\begin{aligned}
g^{i'j'} &= X^{i'}_i \, X^{j'}_j \, g^{ij}; \\
g_{i'j'} &= X^i_{i'} \, X^j_{j'} \, g_{ij};
\end{aligned}
$$

- O determinante g da matriz métrica covariante tem como lei de transformação $g' = X^{-2} \, g$.

De um modo geral, podemos dizer que todas as entidades matemáticas com que vamos trabalhar, caracterizadas por uma multiplicidade num dado sistema de coordenadas, terão de obedecer a uma lei geral de transformação:

$$
t^{i'_1,\ldots,i'_k}_{j'_1,\ldots,j'_l} = |X|^p \, X^{i'_1}_{i_1} \ldots X^{i'_k}_{i_k} \, X^{j_1}_{j'_1} \ldots X^{j_l}_{j'_l} \, t^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}, \tag{41}
$$

com $X = \det(X^{i'}_i)$. As multiplicidades[2] que obedecem a esta lei de transformação são designadas por *tensores*; deste modo, a lei (41) é conhecida por *lei de transformação tensorial*.

Um tensor é definido por:

- Peso p : $\begin{cases} p = 0 & \text{— Tensor absoluto} \\ p \neq 0 & \text{— " relativo} \end{cases}$
- Ordem $k + l$: $\begin{cases} k + l = 0 & \text{— Escalar} \\ k + l = 1 & \text{— Vector} \\ k + l = 2 & \text{— Matriz} \\ k + l \geq 3 & \text{— Tensor} \end{cases}$

[2] Dado que uma multiplicidade é apenas um conjunto de números, estamos necessariamente a cometer um abuso de linguagem: um tensor é uma entidade matemática que obedece à lei de transformação tensorial, sendo caracterizado por uma multiplicidade em cada sistema de coordenadas.

- Variância k, l : $\begin{cases} k \neq 0 = l & \text{— Tensor} & \text{contravariante} \\ k \neq 0 \neq l & \text{— ”} & \text{misto} \\ k = 0 \neq l & \text{— ”} & \text{covariante} \end{cases}$

Exemplo 4. Apresentam-se de seguida alguns tensores:

1. Vector contravariante de peso 1 : $v^{i'} = |X|\ X_i^{i'}\ v^i$.

2. Tensor absoluto misto de ordem 2 : $a_{j'}^{i'} = X_i^{i'}\ X_{j'}^j a_j^i$.

3. Tensor absoluto covariante de ordem 3 : $a_{i'j'k'} = X_{i'}^i\ X_{j'}^j\ X_{k'}^k\ a_{ijk}$.

4. Matriz identidade mista: $\delta_{j'}^{i'} = X_i^{i'}\ X_{j'}^j\ \delta_j^i \equiv \left[X_i^{i'}\right]\ \left[X_i^{i'}\right]^{-1} \equiv I$.

   Nota: as matrizes identidade contravariante δ^{ij} e covariante δ_{ij} não são tensores, visto a sua transformação tensorial não resultar novamente em matrizes identidade.

5. Escalares absolutos: $a' = a$.

   A temperatura num dado ponto de um corpo, ou a função potencial (gravítica, elástica), não dependem do referencial utilizado.

6. O vector diferencial $\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}x^i \underset{i}{\vec{e}}$ é um vector contravariante:

$$\mathrm{d}x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\ \mathrm{d}x^i = X_i^{i'}\ \mathrm{d}x^i.$$

7. As derivadas parciais de um escalar $\nabla\phi$ constituem um vector covariante:

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\ \overset{\vec{i}}{e} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}}\ \overset{\vec{i'}}{e}\ :\ \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\ \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} = X_{i'}^i\ \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}}.$$

5 Álgebra de tensores

Os tensores podem ser definidos como multiplicidades em cada sistema de coordenadas, pelo que obedecem à álgebra de multiplicidades (*vide* Gil & Lau, 2002); a única diferença reside na posição dos índices, que condiciona as operações. Destacam-se algumas regras a que os tensores obedecem:

- **Adição** — dois tensores da mesma ordem, peso e variância (designados *do mesmo tipo*) podem ser somados ou subtraídos, tendo-se como resultado um tensor com a mesma ordem, peso e variância:

$$c_{.lm}^k = a_{.lm}^k + b_{.lm}^k.$$

- **Produto** — o produto de dois tensores é obtido multiplicando as suas componentes
$$c^k_{.lm} = a_{lm}\; b^k.$$
A ordem e variância do novo tensor é dada pela soma das ordens e variâncias dos tensores multiplicados.

- **Contracção** — é possível "contrair" un índice contravariante com um índice covariante, obtendo-se um tensor de ordem $n-2$ (em que n é a ordem do tensor original):
$$c^i_{.jk} \rightarrow c^i_{.ik} = c^1_{.1k} + c^2_{.2k} + \ldots = c_k.$$
Nota: a contracção de índices com a mesma variância só é válida en referenciais ortonormados.

- **Subida e Descida de índices** — as métricas covariantes e contravariantes permitem "descer" e "subir" os índices de um tensor; ou seja, alteram a sua variância:
$$v_i = g_{ij}\; v^j\;;\; v^i = g^{ij}\; v_j;$$
$$a^i_{.j} = g^{ik}\; a_{jk} = g_{jk}\; a^{ik}.$$

5.1 Mnemónica para o cálculo matricial

A maior parte das operações que irão ser efectuadas no cálculo tensorial e que envolvem índices, revelam-se mais fáceis de efectuar através do produto matricial. As operações sobre tensores apresentadas em notação indicial envolvem somas e produtos de números, pelo que são comutativas; o mesmo não se passa com o produto de matrizes, pelo que alguns cuidados têm de ser tomados, ao utilizar operações matriciais no cálculo tensorial. Desenvolveram-se assim algumas regras empíricas, que facilitam um cálculo correcto:

1. Se o tensor for um vector contravariante, é representado por um vector coluna. O índice do vector indica as várias componentes, que estão dispostas ao longo de linhas; é portanto um índice linha, passando a sua representação a ser dada por um índice sublinhado
$$v^{\underline{i}} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

2. Um vector covariante é dado por um vector linha, onde o índice indica as várias colunas (sendo portanto un índice coluna); este índice não é sublinhado

$$v_i = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

3. Se o tensor tem ordem 2, a sua representação matricial tem como índice linha o primeiro índice da esquerda, ou o índice de cima

$$a^{\underline{i}j};\ a_{\underline{i}j};\ a^{\underline{i}}_{j}.$$

4. Sempre que as regras acima dadas não se verificarem, é necessário transpor o tensor

$$v^i = \left[v^{\underline{i}}\right]^t = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \dots & v^n \end{pmatrix};\ v_{\underline{i}} = [v_i]^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix};\ a^{i\underline{j}} = \left[a^{\underline{i}j}\right]^t.$$

5. Numa igualdade, o índice que aparece no membro direito, e ao mesmo tempo no membro esquerdo, é índice linha ou coluna consoante o índice respectivo no membro esquerdo for índice linha ou coluna:

$$a^{\underline{i}j} = b^{ik}\, c_{lk}\, d^{lj} \rightarrow \begin{cases} i & \text{— índice} \quad \text{linha;} \\ j & \text{— \quad ''} \quad \text{coluna.} \end{cases}$$

6. Num produto (identificado pela presença do mesmo índice em dois tensores: $a^{ij}\ b_{jk}$), se um dos índices é um índice linha, o outro é necessariamente um índice coluna (e vice-versa).

7. As multiplicidades devem ser ordenadas de tal forma que os índices comuns sejam adjacentes, ficando deste modo o índice repetido associado a colunas na multiplicidade da esquerda e associado a linhas na multiplicidade da direita:

$$a^i_j = b_{jk}\, c^{ik} \Leftrightarrow a^{\underline{i}}_j = b_{jk}\, c^{ik} \Leftrightarrow a^{\underline{i}}_j = c^{\underline{i}k}\, b_{jk} \Leftrightarrow a^{\underline{i}}_j = c^{\underline{i}k}\, b_{j\underline{k}} \Leftrightarrow \left[a^i_j\right] = \left[c^{ik}\right]\ \left[b_{jk}\right]^t;$$
$$a^{ij} = b^{ik}\, c^j_k \Leftrightarrow a^{ij} = b^{ik}\, c^j_k \Leftrightarrow a^{\underline{i}j} = b^{ik}\, c^j_k \Leftrightarrow a^{\underline{i}j} = b^{\underline{i}k}\, c^j_{\underline{k}} \Leftrightarrow \left[a^{ij}\right] = \left[b^{ik}\right]\ \left[c^j_k\right].$$

Exemplo 5. Considere as aplicações da mnemónica dada:

1. Cálculo do tensor a^{ij}, dado por $a^{ij} = b^{ik}\, c^{lj}\, d_{lk}$:

$$a^{\underline{i}j} = b^{\underline{i}k}\, d_{l\underline{k}}\, c^{\underline{l}j} \Leftrightarrow \left[a^{ij}\right] = \left[b^{ik}\right]\ [d_{lk}]^t\ \left[c^{ij}\right].$$

2. Cálculo do vector contravariante $v^i = g^{ij}\ v_j$:

$$v^{\underline{i}} = g^{ij}\ v_{\underline{j}} \Leftrightarrow \left[v^i\right]\ \left[g^{ij}\right]\ \left[v_j\right]^t = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

3. Cálculo do vector covariante $v_i = g_{ij}\ v^j$:

$$v_i = g_{i\underline{j}}\ v^j \Leftrightarrow [v_i] = \left[v^j\right]^t\ [g_{ij}]^t = \left[v^j\right]^t\ [g_{ij}] = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

(Note-se que a matriz métrica é simétrica.)

6 Componentes físicas

Ao representar um dado vector $\vec{v}$ num sistema de coordenadas não ortogonal em $\Re^n$,

$$\vec{v} = v^i \underset{i}{\vec{e}} = v^1 \underset{1}{\vec{e}} + v^2 \underset{2}{\vec{e}} + \ldots v^n \underset{n}{\vec{e}} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n, \tag{42}$$

e ao calcular a dimensão das suas componentes, verificamos que estas podem diferir de componente para componente, dado os vectores de base poderem não ser normados $\|\underset{i}{\vec{e}}\| \neq 1$. Por exemplo, ao calcular um vector velocidade em coordenadas polares,

$$\vec{v} = v^{i'} \underset{i'}{\vec{e}} = v^r \underset{r}{\vec{e}} + v^\theta \underset{\theta}{\vec{e}} = \dot{r} \underset{r}{\vec{e}} + \dot{\theta} \underset{\theta}{\vec{e}} \tag{43}$$

observa-se imediatamente que as suas componentes têm dimensão $[v^r] = [L][T]^{-1}$ e $[v^\theta] = [T]^{-1}$ (ou seja, a componente segundo θ não tem a dimensão de velocidade), dado existir um vector de base não normado:

$$\begin{array}{lcl} \|\underset{r}{\vec{e}}\| = 1 & \Rightarrow & [\underset{r}{\vec{e}}] = 1 \\ \|\underset{\theta}{\vec{e}}\| = r & \Rightarrow & [\underset{\theta}{\vec{e}}] = [L] \end{array} \tag{44}$$

Para determinar o valor correcto de $\vec{v}$ ao longo do projecção de cada vector de base, é necessário calcular o valor da sua projecção na direcção do vector de base em questão:

$$\|\vec{v}_i\| = v^i\ \|\underset{i}{\vec{e}}\| = v^i \sqrt{g_{ii}} \tag{45}$$

(em que não se está a utilizar a notação indicial). Suponhamos que se passa a utilizar um referencial normado; tal significa que todos os vectores de base foram divididos pela sua norma; para que o vector $\vec{v}$ se mantenha invariante, teremos de multiplicar as componentes pela mesma norma:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{(i)}{\vec{e}} = \underset{i}{\vec{e}} / \|\underset{i}{\vec{e}}\| = \underset{i}{\vec{e}} / \sqrt{g_{ii}} \\ \\ v^{(i)} = v^i\ \|\underset{i}{\vec{e}}\| = v^i\ \sqrt{g_{ii}} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = v^i \underset{i}{\vec{e}} = v^{(i)} \underset{(i)}{\vec{e}} \tag{46}$$

A base criada — *base física* ou *coordenadas físicas* — garante que os vectores de base são normados e, mais importante, que todas as componentes — *componentes físicas* — têm a mesma dimensão, igual à do próprio vector que caracterizam. É usual definir os vectores de base e as componentes físicas através da inclusão dos seus índices em parêntesis curvos.

A base física não tem necessariamente de ser construída para a base natural; existe também uma base física da base dual (que não tem de coincidir com a base física natural):

$$\left.\begin{array}{l} \overset{(i)}{\vec{e}} = \overset{i}{\vec{e}}/\|\overset{i}{\vec{e}}\| = \overset{i}{\vec{e}}/\sqrt{g^{ii}} \\ \\ v_{(i)} = v_i \; \|\overset{i}{\vec{e}}\| = v_i \; \sqrt{g^{ii}} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = v_i \overset{i}{\vec{e}} = v_{(i)} \overset{(i)}{\vec{e}}. \tag{47}$$

Um tensor t^i_j é dado numa base física por[3]

$$t^{(i)}_{(j)} = t^i_j \; \|\underset{i}{\vec{e}}\| \; \|\overset{j}{\vec{e}}\| = t^i_j \; \sqrt{g_{ii}} \; \sqrt{g^{jj}}\,. \tag{48}$$

Por uma questão de conveniência, designam-se as normas dos vectores de base naturais por *factores de escala* — h_i, tendo-se

$$h_i \equiv \|\underset{i}{\vec{e}}\| = \sqrt{g_{ii}} \Rightarrow v^{(i)} = v^i h_i; \; \underset{(i)}{\vec{e}} = \underset{i}{\vec{e}}/h_i. \tag{49}$$

Sempre que o sistema de coordenadas utilizado é ortogonal, verifica-se facilmente que os vectores de base dual são paralelos aos vectores de base natural $\overset{i}{\vec{e}}//\underset{i}{\vec{e}}$. Deste modo, as suas bases físicas (naturais e duais) vão coincidir, assim como as respectivas componentes físicas:

$$\overset{i}{\vec{e}}//\underset{i}{\vec{e}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overset{(i)}{\vec{e}} = \underset{i}{\vec{e}} = \underset{i}{\vec{e}}/h_i = \overset{i}{\vec{e}}\, h_i\,; \\ \\ v_{(i)} = v^{(i)} = v^i h_i = v_i/h_i. \end{array}\right. \tag{50}$$

Conclui-se que a base física de um referencial ortogonal (caso das coordenadas polares, cilíndricas e esféricas) é "equivalente" a uma base cartesiana, localmente. O produto interno pode assim ser definido da forma habitual:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u^i \; v_i = u^i \; \|\underset{i}{\vec{e}}\| \; \|\overset{i}{\vec{e}}\| \; v_i = u^{(i)} \; v_{(i)} = u_{(i)} \; v^{(i)} = u^{(i)} \; v^{(i)} = u_{(i)} \; v_{(i)}. \tag{51}$$

[3]Mais uma vez se chama atenção para o facto de não termos estado a respeitar a notação indicial: a expressão diz respeito a um elemento apenas e não a uma soma.

Quando se utiliza uma base física ortogonal, é usual colocar todos os índices em baixo (embora tal constitua um abuso de linguagem):

$$\vec{v} = v_{(i)} \underset{(i)}{\vec{e}} \;; \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_{(i)} \, v_{(i)}. \tag{52}$$

A base física tem que ser construída em cada sistema de coordenadas e localmente (*i.e.* para cada ponto); a transformação entre bases físicas também não é possível de realizar directamente.

7 Transferência das componentes de um vector

Suponhamos que estamos a efectuar observações do movimento de queda de um meteorito em Portugal (P). Em intervalos de tempo constantes, observadores medem a velocidade do meteorito e enviam esses dados a um centro de observação, localizado no Equador (Q). Os dois centros de estudo (Equador e Portugal) vão estar a utilizar um referencial ortonormado próprio (neste caso, com um eixo radial — perpendicular à superfície da terra — e outros dois eixos tangentes à superfície terrestre). Embora ambos os observadores queiram caracterizar o mesmo fenómeno — o vector velocidade do meteorito — o facto de utilizarem referenciais diferentes leva necessariamente a que as componentes medidas em Portugal $v^{i'}(P)$ correspondam a um vector diferente, se forem aplicadas directamente aos vectores de base do referencial do Equador:

$$\vec{v} = v^{i'}(P) \, \underset{i'}{\vec{e}}(P) = v^{\alpha'}(Q) \, \underset{\alpha'}{\vec{e}}(Q) \neq v^{i'}(P) \, \underset{i'}{\vec{e}}(Q) \tag{53}$$

Torna-se assim necessário transformar as componentes medidas em Portugal de uma forma adequada, para que definam o vector velocidade nas coordenadas do Equador.

Podemos sempre considerar que estes dois referenciais utilizados são a concretização de um referencial curvilíneo em cada ponto (note-se que o referencial esférico físico permite caracterizar um referencial cartesiano, num dado ponto da superfície do nosso planeta). As componentes de $\vec{v}$ podem ser então calculadas no referencial cartesiano original, utilizando a matriz de transformação inversa, em cada ponto:

$$v^i(P) = X^i_{i'}(P) \, v^{i'}(P) \tag{54}$$

$$v^\alpha(Q) = X^\alpha_{\alpha'}(Q) \, v^{\alpha'}(Q) \tag{55}$$

No referencial cartesiano, as componentes de um vector não dependem da origem do referencial $v^\alpha(Q) = \delta^\alpha_i \; v^i(P)$; esta característica permite-nos calcular as componentes em Q à custa do conhecimento das mesmas no ponto P:

$$\left.\begin{array}{r} v^i(P) = X^i_{i'}(P)\, v^{i'}(P) \\ \\ v^\alpha(Q) = \delta^\alpha_i\, v^i(P) \\ \\ v^{\alpha'}(Q) = X^{\alpha'}_\alpha(Q)\, v^\alpha(Q) \end{array}\right\} \Rightarrow v^{\alpha'}(Q) = X^{\alpha'}_\alpha(Q)\, \delta^\alpha_i\, X^i_{i'}(P)\, v^{i'}(P)$$

Resta deduzir a lei geral de transferência das componentes de um vector de um ponto para o outro. Suponhamos que a relação entre componentes é dada por $v^i(P) = T^i_\alpha\, v^\alpha(Q)$ (e não necessariamente pela tensor identidade — caso das coordenadas cartesianas); então a transferência das componentes num novo referencial $v^{i'} = X^{i'}_i\, v^i$ é efectuada utilizando o operador *transferidor*:

$$T^{i'}_{\alpha'} = X^i_{i'}(P)\, T^i_\alpha X^\alpha_{\alpha'}(Q) \tag{56}$$

tendo-se a relação de transferência dada por

$$v^{i'}(P) = T^{i'}_{\alpha'}\, v^{\alpha'}(Q) \tag{57}$$

Destaque-se que o operador transferidor não é um tensor, dado a sua lei de transformação ser calculada usando matrizes de transformação de pontos diferentes.

8 Derivada Covariante

A derivada de um vector $\vec{v} = v^i \underset{i}{\vec{e}}$ em ordem a uma coordenada é necessariamente a derivada de um produto, pois na maioria dos casos os vectores de base variam com a posição. Tal não é visível em coordenadas cartesianas, onde os vectores de base são constantes (*i.e.* iguais em todos os pontos): a derivada de qualquer vector resume-se então à derivada das suas componentes:

$$\underset{i}{\vec{e}} = \text{const} : \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}x^i = (\mathrm{d}v^j/\mathrm{d}x^i)\, \underset{j}{\vec{e}} + v^j(\mathrm{d}\, \underset{j}{\vec{e}}/\mathrm{d}x^i) = (\mathrm{d}v^j/\mathrm{d}x^i)\, \underset{j}{\vec{e}}. \tag{58}$$

Na maior parte dos nossos cálculos os vectores vão ser representados apenas pelas suas componentes v^i. Para se poder distinguir entre a derivada das componentes de um vector e a derivada do próprio vector, criou-se a noção de *derivada covariante* de um vector:

$$\nabla_j\, \vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}x^j}. \tag{59}$$

Temos então:

$$\nabla_j \vec{v} = \nabla_j(v^i \underset{i}{\vec{e}}) = (\nabla_j v^i)\underset{i}{\vec{e}} + v^i(\nabla_j \underset{i}{\vec{e}}) = (\partial v^i/\partial x^j)\underset{i}{\vec{e}} + v^i(\nabla_j \underset{i}{\vec{e}}), \tag{60}$$

onde $\partial v^i/\partial x^j$ é a derivada parcial da componente v^i em ordem à coordenada x^j. Como o vector natural pode ser sempre escrito na sua própria base $\underset{i}{\vec{e}} = \underset{i}{e}^k \underset{k}{\vec{e}}$ (*vide* capítulo 2.3), temos

$$\nabla_j \underset{i}{\vec{e}} = (\nabla_j \underset{i}{e}^k) \underset{k}{\vec{e}} \Rightarrow \nabla_j \vec{v} = (\partial v^i/\partial x^j) \underset{i}{\vec{e}} + v^i (\nabla_j \underset{i}{e}^k) \underset{k}{\vec{e}} \tag{61}$$

onde "k" e "i" são índices mudos e portanto é possível utilizar qualquer letra para os representar na igualdade; inclusive, pode-se trocar o "k" com o "i" no último termo de (61)

$$v^i (\nabla_j \underset{i}{e}^k) \underset{k}{\vec{e}} \equiv v^k (\nabla_j \underset{k}{e}^i) \underset{i}{\vec{e}} \tag{62}$$

tendo-se:

$$\nabla_j (v^i \underset{i}{\vec{e}}) = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \, \nabla_j \underset{k}{e}^i \right) \underset{i}{\vec{e}}. \tag{63}$$

Como pretendemos usar apenas as componentes do vector na formulação das equações, a derivada covariante de um vector (contravariante) é dada pela expressão:

$$\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \, \nabla_j \underset{k}{e}^i. \tag{64}$$

A derivada covariante das componentes dos vectores de base natural é definida pelos *símbolos de Christoffel*:

$$\Gamma^i_{\cdot jk} = \nabla_j \underset{k}{e}^i, \tag{65}$$

onde $\Gamma^i_{\cdot jk}$ é a derivada covariante em ordem à coordenada x^j, da i - ésima componente do vector de base natural $\underset{k}{\vec{e}}$; deste modo, a derivada covariante de um vector expresso pelas suas componentes contravariantes pode ser escrita em função dos símbolos de Christoffel:

$$\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{\cdot jk} \, v^k. \tag{66}$$

Algumas características da derivada covariante e dos símbolos de Christoffel são:

- Em coordenadas rectilíneas, os vectores de base são constantes, pelo que a sua derivada covariante é nula $\Gamma^i_{\cdot jk} = 0$, ou seja, a derivada covariante de qualquer vector coincide com a derivada (parcial) das componentes:

$$\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}; \tag{67}$$

- A derivada covariante de qualquer função escalar é dada apenas pelas derivadas parciais, em qualquer sistema de coordenadas:

$$\nabla_j \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}. \tag{68}$$

- A derivada covariante é um tensor, obedecendo à lei de transformação tensorial:

$$\nabla_{j'} v^{i'} = X_i^{i'} \, X_{j'}^j \, \nabla_j v^i; \tag{69}$$

contudo, os símbolos de Christoffel não representam um tensor.

Prova-se facilmente (*vide* anexo A, eq. 160) que os símbolos de Christoffel obedecem à lei de transformação

$$\Gamma^{i'}_{.j'k'} = X_i^{i'} \, X_{j'}^j \, X_{k'}^k \, \Gamma^i_{.jk} + X_i^{i'} \, \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \tag{70}$$

pelo que as seguintes observações podem ser feitas:

- Os símbolos de Christoffel não constituem um tensor, pois não obedecem à lei de transformação tensorial (repare-se na presença de um termo adicional).

- Numa transformação rectilínea, os vectores de base são constantes:

$$X_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} = 0 \Rightarrow \Gamma^{i'}_{.j'k'} = X_i^{i'} \, X_{j'}^j \, X_{k'}^k \, \Gamma^i_{.jk}. \tag{71}$$

Se o referencial inicial é o cartesiano, $\Gamma^i_{.jk} = 0 \Rightarrow \Gamma^{i'}_{.j'k'} = 0$; como seria de esperar os símbolos de Christoffel são nulos em qualquer sistema de coordenadas rectilíneas.

- Utilizando uma transformação arbitrária, mas em que o referencial inicial é o cartesiano ($\Gamma^i_{.jk} = 0$), temos a lei de transformação:

$$\Gamma^{i'}_{.j'k'} = X_i^{i'} \, \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \Rightarrow \Gamma^{i'}_{.j'k'} = \Gamma^i_{.k'j'} \tag{72}$$

pelo que se conclui que *os símbolos de Christoffel apresentam simetria nos índices covariantes.*

- Designa-se por *símbolos de Christoffel contraídos*, a contracção: $\Gamma_k \equiv \Gamma^i_{.ik}$.

Efectuámos a derivada de um vector contravariante (ou seja, dado numa base natural). Vamos estudar agora como se escreve em notação indicial a derivada de um vector covariante, dado como combinação linear de vectores de base dual; para o efeito vamos utilizar a relação fundamental da análise tensorial (11)

$$\vec{\overset{i}{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} = \delta^i_j \Rightarrow \nabla_k(\delta^i_j) = 0 \Leftrightarrow \nabla_k(\vec{\overset{i}{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}}) = 0 \Leftrightarrow (\nabla_k \vec{\overset{i}{e}}) \cdot \underset{j}{\vec{e}} + \vec{\overset{i}{e}} \cdot (\nabla_k \underset{j}{\vec{e}}) = 0, \tag{73}$$

assim como a expressão para a derivada covariante de um vector natural (59)

$$(\nabla_k \vec{\overset{i}{e}}) \cdot \underset{j}{\vec{e}} = -\vec{\overset{i}{e}} \cdot (\nabla_k \underset{j}{\vec{e}}) = -\vec{\overset{i}{e}} \cdot (\Gamma^l_{.kj} \underset{l}{\vec{e}}) = -\Gamma^l_{.kj} \vec{\overset{i}{e}} \cdot \underset{l}{\vec{e}} = -\Gamma^l_{.kj} \delta^i_l = -\Gamma^i_{.kj} \,. \tag{74}$$

Através da relação fundamental (11), podemos também deduzir a seguinte expressão

$$\vec{\overset{l}{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} = \delta^l_j \Leftrightarrow -\Gamma^i_{.kl} \vec{\overset{l}{e}} \cdot \underset{j}{\vec{e}} = -\Gamma^i_{.kl} \delta^l_j \Leftrightarrow (-\Gamma^i_{.kl} \vec{\overset{l}{e}}) \cdot \underset{j}{\vec{e}} = -\Gamma^i_{.kj} \,. \tag{75}$$

Comparando (74) e (75), temos a relação para a derivada covariante de um vector de base dual:

$$\nabla_k \vec{\overset{i}{e}} = -\Gamma^i_{.kl} \vec{\overset{l}{e}} \tag{76}$$

Observa-se imediatamente que, à excepção do sinal menos, a expressão da derivada covariante dos vectores de base dual (76) é semelhante à da derivada dos vectores de base natural (59); tal seria de esperar, dada a relação fundamental que os une (11): quando os vectores de base natural “aumentam”, os vectores de base dual têm necessariamente de “diminuir”, na razão inversa, o que leva a que as suas derivadas tenham sinais contrários.

Ao utilizar as componentes dos vectores de base dual, temos a expressão:

$$\nabla_k \vec{\overset{i}{e}} = -\Gamma^i_{.kl} \vec{\overset{l}{e}} = -\Gamma^i_{.kj} \vec{\overset{j}{e}} \Leftrightarrow \nabla_k(\overset{i}{e}_j \vec{\overset{j}{e}}) = -\Gamma^i_{.kj} \vec{\overset{j}{e}} \Rightarrow \nabla_k \overset{i}{e}_j = -\Gamma^i_{.kj}. \tag{77}$$

Podemos finalmente escrever a derivada covariante de um vector $\vec{v}$, dado quer em componentes contravariantes ou covariantes:

$$\nabla_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{.kl}\, v^l; \tag{78}$$

$$\nabla_k v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x^k} - \Gamma^l_{.kj}\, v_l. \tag{79}$$

De uma forma genérica, a derivada covariante de um tensor misto vai apresentar um símbolo de Christoffel por cada índice que possua; para um tensor misto de ordem 2, teremos:

$$\nabla_k t^i_j = \frac{\partial t^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{.kl}\, t^l_j - \Gamma^l_{.kj}\, t^i_l. \tag{80}$$

No caso das métricas covariantes e contravariantes, temos as derivadas covariantes dadas pelas expressões

$$\nabla_n g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} - \Gamma^l_{ni}\, g_{lj} - \Gamma^l_{nj}\, g_{il};$$

$$\nabla_n g^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^n} + \Gamma^i_{nl}\, g^{lj} + \Gamma^j_{nl}\, g^{il}.$$

Estas vão ser nulas, no caso das métricas cartesianas ($g_{ij} \equiv \delta_{ij}$ e $g^{ij} \equiv \delta^{ij}$):

$$\left.\begin{array}{l} g_{ij} = \delta_{ij} = \text{const.} \\ \\ \Gamma^i_{.jk} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla_n\, g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} - \Gamma^l_{ni}\, g_{lj} - \Gamma^l_{nj}\, g_{il} = 0 \qquad (81)$$

(O mesmo se verifica para a métrica contravariante.) Como a derivada covariante é um tensor, a derivada covariante da métrica (covariante ou contravariante) é nula, em qualquer referencial:

$$\nabla_n\, g^{ij} = 0 \;\;\wedge\;\; \nabla_{n'} g^{i'j'} = X^n_{n'}\, X^{i'}_i\, X^{j'}_j\, \nabla_n g^{ij} \Rightarrow \nabla_{n'} g^{i'j'} = 0. \qquad (82)$$

Muitos leitores acabam por fazer a pergunta:

Porquê a designação “derivada covariante”?

Repare-se que a derivada é necessariamente uma função que se aplica a um tensor (quer este seja dado por componentes contravariantes, covariantes ou ambas); deste modo, é dada no espaço das funções (espaço dual), tendo componentes covariantes — esta é a razão do seu nome.

8.1 Símbolos de Christoffel em coordenadas ortogonais

Embora se possa utilizar a lei de transformação (70), no cálculo dos símbolos de Christoffel, existe uma expressão (162) que relaciona os símbolos de Christoffel com as métricas (dada no Apêndice B),

$$\Gamma^i_{.jk} = \frac{1}{2} g^{in} \left\{ -\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^k} \right\}; \qquad (83)$$

esta expressão é muito mais simples do que (70), sendo sempre a utilizada na determinação dos símbolos de Christoffel.

Quando as coordenadas são ortogonais, (83) simplifica-se nos casos[4]:

$$\forall\, i \neq j, i \neq k, j \neq k : \Gamma^{i}_{.jk} = 0 \tag{84a}$$

$$\forall\, i \neq j : \Gamma^{i}_{.ij} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^{j}} \tag{84b}$$

$$\forall\, i \neq j : \Gamma^{i}_{.jj} = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^{i}} \tag{84c}$$

$$\text{Todos os índices iguais: } \Gamma^{i}_{.ii} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^{i}} \tag{84d}$$

pelo que temos apenas de analisar as várias componentes da matriz da métrica covariante, e as suas derivadas.

Exemplo 6. No caso das coordenadas polares temos a matriz da métrica covariante já deduzida (*vide* exemplo 3, pag. 18), em que a única componente que depende das coordenadas é $g_{2'2'} = r^2$ (sendo função da coordenada r). Deste modo, a única derivada não nula é

$$\frac{\partial g_{2'2'}}{\partial r} = 2r, \tag{85}$$

pelo que os únicos símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\Gamma^{\theta}_{.r\theta} = \Gamma^{\theta}_{.\theta r} = \Gamma^{2'}_{.2'1'} = \frac{1}{2} g^{2'2'} \frac{\partial g_{2'2'}}{\partial r} = r^{-1}; \tag{86}$$

$$\Gamma^{r}_{.\theta\theta} = \Gamma^{1'}_{.2'2'} = -\frac{1}{2} g^{1'1'} \frac{\partial g_{2'2'}}{\partial r} = -r. \tag{87}$$

9 Operadores diferenciais

Vamos finalmente mostrar algumas das aplicações da análise tensorial, nomeadamente no cálculo dos operadores diferenciais; estes aparecem em todas as equações da Mecânica, muitas das vezes expressas em referenciais não conhecidos. A força gravítica pode ser sempre definida pelo *gradiente* de um potencial $\vec{F} = -\nabla\phi$. No referencial cartesiano, é conhecida a expressão para o gradiente

$$\nabla\phi \equiv \left(\partial\phi/\partial x^1,\ \ \partial\phi/\partial x^2,\ \ \partial\phi/\partial x^3\right).$$

[4]Note-se que a convenção da soma não é utilizada em (84), pelo que a repetição de índices não indica a presença de somatório: cada símbolo de Christoffel é dado apenas pelo termo indicado na expressão; *e.g.* $\Gamma^{1}_{.12} = (1/2) g^{11} \partial g_{11}/\partial x^2$ — *vide* Apêndice B.

Mas como será dado o mesmo gradiente em coordenadas cilíndricas? Ou noutras coordenadas quaisquer, definidas para um problema específico? É o que vamos ver neste capítulo.

9.1 Gradiente de uma função escalar

O *gradiente* de qualquer função escalar (que dependa das coordenadas) é representado por um vector covariante, em que as componentes são dadas pelas derivadas covariantes:

$$\text{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \nabla_k\phi \overset{\vec{k}}{e} = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} \overset{\vec{k}}{e} \tag{88}$$

Note-se que a derivada covariante de um escalar se resume à derivada parcial do mesmo. Em coordenadas físicas o gradiente é definido da forma habitual:

$$\nabla\phi = \nabla_{(k)}\phi \overset{\vec{(k)}}{e} \tag{89}$$

onde:

$$\nabla_{(k)}\phi = \|\overset{\vec{k}}{e}\|\nabla_k\phi = \sqrt{g^{kk}}\nabla_k\phi \tag{90}$$

$$\overset{\vec{(k)}}{e} = \overset{\vec{k}}{e} \;/\; \|\overset{\vec{k}}{e}\| = \overset{\vec{k}}{e} \;/\; \sqrt{g^{kk}} \tag{91}$$

9.2 Divergência de um vector (contravariante)

A *divergência* de um vector (representado pelas suas componentes contravariantes) é definida como a contracção da derivada covariante do vector:

$$\text{div}\,\vec{v} = \nabla_i v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{.ik}v^k = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \Gamma_k v^k \tag{92}$$

Utilizando a fórmula de Γ_k (169), a expressão para a divergência simplifica-se

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\sqrt{g}\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}v^k \Rightarrow \nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}v^i\right) \tag{93}$$

Em coordenadas físicas, $v^{(i)} = \|\underset{i}{\vec{e}}\|v^i = \sqrt{g_{ii}}v^i$, ou seja

$$\nabla_{(i)}v^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{g}\,v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}}\right). \tag{94}$$

Mais uma vez se chama a atenção para o abuso de linguagem utilizado: embora se repita quatro vezes o índice i com a introdução da componente da métrica g_{ii}, continuamos a efectuar um somatório em i

$$\nabla_{(i)} v^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g}\, v^1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g}\, v^2}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\sqrt{g}\, v^3}{\sqrt{g_{33}}} \right) \right\}. \tag{95}$$

Em coordenadas cartesianas, onde a métrica é a matriz identidade, temos a expressão familiar

$$\nabla_i v^i = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}. \tag{96}$$

9.3 Laplaciano de uma função escalar

O *laplaciano* de uma função escalar consiste na divergência do gradiente

$$\Delta\phi = \nabla_i \left(g^{ij} \nabla_j \phi \right) \Rightarrow \Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right). \tag{97}$$

Em coordenadas cartesianas, $g^{ij} = \delta^{ij}$, pelo que o laplaciano assume a expressão

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} \delta^{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \tag{98}$$

9.4 Rotacional de um vector

A definição de *rotacional* de um vector utiliza o produto externo de dois vectores. Torna-se assim necessário caracterizar primeiro o produto externo para quaisquer coordenadas, em notação indicial. Em coordenadas cartesianas, o produto externo

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A} \times \vec{B})^i \underset{i}{\vec{e}} = (\vec{A} \times \vec{B})_i \overset{\vec{i}}{e} \tag{99}$$

é representado através do símbolo de permutação

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{ijk\} \text{ for permutação par de } \{123\}; \\ 0 & \text{se } i = j,\ i = k,\ j = k; \\ -1 & \text{se } \{ijk\} \text{ for permutação ímpar de } \{123\}; \end{cases} \tag{100}$$

este é dado sempre com os índices em baixo (pois em coordenadas cartesianas não se torna necessário diferenciar as componentes covariantes das contravariantes):

$$(\vec{A} \times \vec{B})^i = (\vec{A} \times \vec{B})_i = \mathrm{e}_{ijk}\, A^j\, B^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{A} \times \vec{B})_1 & = \mathrm{e}_{1jk}\, A^j\, B^k = \mathrm{e}_{123}\, A^2\, B^3 + \mathrm{e}_{132}\, A^3\, B^2 = A^2\, B^3 - A^3\, B^2; \\ (\vec{A} \times \vec{B})_2 & = \mathrm{e}_{2jk}\, A^j\, B^k = \mathrm{e}_{213}\, A^1\, B^3 + \mathrm{e}_{231}\, A^3\, B^1 = -A^1\, B^3 + A^3\, B^1; \\ (\vec{A} \times \vec{B})_3 & = \mathrm{e}_{3jk}\, A^j\, B^k = \mathrm{e}_{312}\, A^1\, B^2 + \mathrm{e}_{321}\, A^3\, B^1 = A^1\, B^2 - A^2\, B^1. \end{cases} \tag{101}$$

Contudo, o produto externo definido com o símbolo de permutação não se mantém invariante, quando se aplica uma mudança de coordenadas. Tal deve-se ao facto do símbolo de permutação ser um caso particular (para coordenadas ortonormadas) do *tensor de permutação*:

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\, \mathrm{e}_{ijk}; \tag{102}$$

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \mathrm{e}^{ijk}. \tag{103}$$

Em qualquer sistema de coordenadas, o produto externo é assim definido pelo tensor de permutação:

$$(\vec{A} \times \vec{B})^i = \varepsilon^{ijk}\, A_j\, B_k; \tag{104}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk}\, A^j\, B^k. \tag{105}$$

O rotacional de um vector é definido como o produto externo do operador diferencial ∇ — derivada covariante, com o próprio vector

$$\mathrm{rot}\, \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = (\nabla \times \vec{v})^i \underset{i}{\vec{e}} \Rightarrow (\nabla \times \vec{v})^i = \varepsilon^{ijk} \nabla_j v_k. \tag{106}$$

Para o caso particular de um espaço com três dimensões, e com o índice i fixo, o tensor de permutação só pode tomar dois valores não nulos: para $i = 1$, temos $\varepsilon^{123} = 1$ e $\varepsilon^{132} = -1$. Conclui-se então que cada componente do vector rotacional $\mathrm{rot}\, \vec{v}$ é dada apenas pela soma de dois termos

$$(\nabla \times \vec{v})^i = \varepsilon^{ijk} \nabla_j v_k + \varepsilon^{ikj} \nabla_k v_j = \varepsilon^{ijk} (\nabla_j v_k - \nabla_k v_j) \tag{107}$$

(onde $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$). Note-se que mais uma vez, deixámos de utilizar a notação indicial e que a expressão acima dada corresponde apenas ao cálculo do termo apresentado (e não a um somatório). O rotacional revela-se assim um operador muito simples de calcular, tendo-se apenas o cuidado de atribuir valores diferentes entre si aos índices do tensor de permutação; por exemplo para a primeira componente

$$(\nabla \times \vec{v})^1 = \varepsilon^{123}(\nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2) = \varepsilon^{132}(\nabla_3 v_2 - \nabla_2 v_3) = \frac{1}{\sqrt{g}}(\nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2). \quad (108)$$

A expressão (107) ainda se simplifica, se atentarmos na definição de derivada covariante

$$\nabla_j v_k - \nabla_k v_j = \frac{\partial v_k}{\partial x^j} - \Gamma^l_{.jk}\, v_l - \frac{\partial v_j}{\partial x^k} + \Gamma^l_{.kj}\, v_l = \frac{\partial v_k}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^k}; \quad (109)$$

o que nos leva à expressão final para o rotacional de um vector:

$$(\nabla \times v)^i = \varepsilon^{ijk}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right) \text{ (com } i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k). \quad (110)$$

Em componentes físicas, temos a expressão

$$v_{(k)} = \|\vec{e}^{\,k}\| v_k = \sqrt{g^{kk}} v_k \Rightarrow (\nabla \times v)^{(i)} = \sqrt{g^{ii}}\, \varepsilon^{ijk}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{v_{(k)}}{\sqrt{g^{kk}}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{v_{(j)}}{\sqrt{g^{jj}}}\right)\right]. \quad (111)$$

10 Diferencial absoluta e intrínseca

Em coordenadas rectilíneas, os operadores diferencial e derivada (em ordem a um parâmetro t), são definidos em função da derivada parcial

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \mathrm{d}t \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (112)$$

Em coordenadas curvilíneas, substitui-se a derivada parcial pela derivada covariante, tendo-se as novas definições

$$\textit{Derivada absoluta: } \mathrm{D} \equiv \mathrm{d}x^i \nabla_i + \mathrm{d}t \frac{\partial}{\partial t}; \quad (113)$$

$$\textit{Derivada intrínseca: } \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\nabla_i + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (114)$$

Tanto a derivada absoluta como a derivada intrínseca são tensores, obedecendo à lei de transformação tensorial (41).

10.1 Aceleração em coordenadas curvilíneas

A noção de derivada intrínseca permite-nos calcular a derivada de um vector em ordem a um parâmetro; se o vector caracterizar a velocidade de uma partícula e o parâmetro for o tempo, então temos definida a noção de aceleração, para qualquer sistema de coordenadas curvilíneas.

As componentes do vector velocidade são sempre dadas pela derivada das coordenadas, independentemente do sistema de coordenadas utilizado[5]:

$$v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^i \Rightarrow \vec{v} = v^i \underset{i}{\vec{e}} = \dot{x}^i \underset{i}{\vec{e}}, \tag{115}$$

No entanto, a aceleração — derivada do vector $\vec{v}$ — tem de entrar em conta com a derivada dos vectores de base (além da derivada das componentes), o que implica a utilização da derivada covariante. A aceleração é dada então pela derivada intrínseca da velocidade em ordem ao tempo:

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t};\ a^i = \frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\nabla_j v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t}. \tag{116}$$

Aplicando a definição de derivada covariante (59)

$$a^i = v^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{.jk} v^k \right) + \frac{\partial v^i}{\partial t} = v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{.jk} v^j v^k + \frac{\partial v^i}{\partial t}, \tag{117}$$

e substituindo $v^j = \mathrm{d}x^j/\mathrm{d}t$ na expressão acima dada,

$$a^i = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_{.jk} v^j v^k = \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{.jk} v^j v^k,$$

temos as fórmulas para a aceleração

$$a^i = \dot{v}^i + \Gamma^i_{.jk} v^j v^k. \tag{118}$$

Nos casos (extremamente usuais) em que a velocidade não depende explicitamente do tempo, podemos escrever (118) como

$$a^i = \ddot{x}^i + \Gamma^i_{.jk} \dot{x}^j \dot{x}^k. \tag{119}$$

[5]Note-se que a velocidade nem sempre é dada pela derivada do vector posição; em muitos sistemas de coordenadas, o vector posição nem sequer pode ser definido.

10.2 Velocidade e aceleração em coordenadas polares

Um exemplo bastante comum de aplicação da análise tensorial consiste no cálculo da velocidade e da aceleração em coordenadas polares $(r,\, \theta)$, e consequente utilização na descrição do movimento de partículas.

Em coordenadas polares a velocidade é dada por

$$\vec{v} = \dot{x}^i \underset{i}{\vec{e}} = \dot{x}^1 \underset{1}{\vec{e}} + \dot{x}^2 \underset{2}{\vec{e}} = \dot{r} \underset{r}{\vec{e}} + \dot{\theta} \underset{\theta}{\vec{e}}. \tag{120}$$

Para obter as componentes físicas, basta multiplicar pelas normas dos vectores:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^1 = \dot{r} \\ v^2 = \dot{\theta} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v^{(1)} = \dot{r} \\ v^{(2)} = r\dot{\theta} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \underset{(r)}{\vec{e}} + r\dot{\theta} \underset{(\theta)}{\vec{e}}. \tag{121}$$

A aceleração contravariante (118) é dada no referencial polar pela expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^1 = \dot{v}^1 + \Gamma^1_{.jk} v^j v^k = \ddot{r} + \Gamma^1_{.22} v^2 v^2 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; \\ a^2 = \dot{v}^2 + \Gamma^2_{.jk} v^j v^k = \ddot{\theta} + 2\Gamma^2_{.12} v^1 v^2 = \ddot{\theta} + 2r^{-1}\dot{r}\dot{\theta}. \end{array} \right. \tag{122}$$

Em coordenadas polares físicas, temos a expressão já conhecida

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{(r)} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a^{(\theta)} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \underset{(r)}{\vec{e}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \underset{(\theta)}{\vec{e}}. \tag{123}$$

Passamos a apresentar dois casos específicos nossos conhecidos.

Exemplo 7. Movimento circular — Sempre que o raio da trajectória é constante, as expressões para a velocidade e aceleração simplificam-se, obtendo-se as fórmulas já conhecidas:

$$r = \text{const} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} v^{(1)} = 0 \\ v^{(2)} = r\dot{\theta} = \omega r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \omega r \underset{(\theta)}{\vec{e}}, \\ \\ \left. \begin{array}{l} a^{(1)} = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2 \\ a^{(2)} = r\ddot{\theta} = \alpha r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} = -r\omega^2 \underset{(r)}{\vec{e}} + \alpha r \underset{(\theta)}{\vec{e}}, \end{array} \right. \tag{124}$$

onde se identificam facilmente os termos referentes à velocidade tangencial (ωr), à aceleração centrípeta $(-r\omega^2)$ e à aceleração tangencial (αr).

Exemplo 8. Movimento devido a força central — Neste caso, a força encontra-se sempre dirigida para a origem do referencial: $\vec{f} = f \underset{(r)}{\vec{e}}$. Pela segunda lei de Newton:

$$\vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2, \\ \\ 0 = mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} \Leftrightarrow r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \Leftrightarrow \dot{\left(r^2\dot{\theta}\right)} = 0. \end{array} \right. \tag{125}$$

temos a equação do movimento segundo θ

$$r^2\dot{\theta} = \text{const} \Leftrightarrow r(r\dot{\theta}) = \text{const}, \tag{126}$$

conhecida pela *Lei das áreas de Kepler:*

> Um corpo sujeito a uma força central descreve áreas iguais em tempos iguais, ao longo da sua trajectória.

11 Aplicações

11.1 Coordenadas cilíndricas

Como já foi referido anteriormente (*vide* 2.2.2), as coordenadas cilíndricas representam uma extensão das coordenadas polares, em que a coordenada z se mantém invariante; tendo-se já deduzido a matriz da métrica covariante em coordenadas polares (*vide* exemplo 3, pag. 18), a sua métrica covariante é assim dada pela matriz

$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{127}$$

tendo-se $g = \det(g_{i'j'}) = r$. Das componentes novas que a métrica covariante passa a apresentar (em relação à métrica covariante polar), a única diferente de zero é constante ($g_{3'3'} = 1$), pelo que a sua derivada é sempre nula; deste modo, os símbolos de Christoffel não nulos das coordenadas cilíndricas são os mesmos das coordenadas polares (86):

$$\Gamma^{\theta}_{.r\theta} = \Gamma^{\theta}_{.\theta r} = \Gamma^{2'}_{.2'1'} = \frac{1}{2} g^{2'2'} \frac{\partial g_{2'2'}}{\partial r} = r^{-1}; \tag{128}$$

$$\Gamma^{r}_{.\theta\theta} = \Gamma^{1'}_{.2'2'} = -\frac{1}{2} g^{1'1'} \frac{\partial g_{2'2'}}{\partial r} = -r. \tag{129}$$

Com o conhecimento da métrica covariante e dos símbolos de Christoffel, podemos deduzir os operadores diferenciais para as coordenadas cilíndricas (onde se apresentam também as fórmulas para as coordenadas físicas):

- **Gradiente**

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\overset{\vec{r}}{e} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\overset{\vec{\theta}}{e} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\overset{\vec{z}}{e} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\overset{(\vec{r})}{e} + r^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\overset{(\vec{\theta})}{e} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\overset{(\vec{z})}{e} \tag{130}$$

- **Divergência**

$$\nabla\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}v^i\right) = r^{-1}\left\{\frac{\partial\left(rv^r\right)}{\partial r} + r\frac{\partial v^\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial rv^z}{\partial z}\right\} \tag{131}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{g}\,v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}}\right) = r^{-1}\left\{\frac{\partial\left(rv^{(r)}\right)}{\partial r} + \frac{\partial v^{(\theta)}}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(rv^{(z)}\right)}{\partial z}\right\} \tag{132}$$

- **Laplaciano**

$$\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right\} \tag{133}$$

- **Rotacional**

$$(\nabla\times v)^i = \varepsilon^{ijk}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right) \Rightarrow \begin{cases} (\nabla\times v)^r = r^{-1}\left(\partial v_z/\partial\theta - \partial v_\theta/\partial z\right) \\ (\nabla\times v)^\theta = -r^{-1}\left(\partial v_z/\partial r - \partial v_r/\partial z\right) \\ (\nabla\times v)^z = r^{-1}\left(\partial v_\theta/\partial r - \partial v_r/\partial\theta\right) \end{cases} \tag{134}$$

$$(\nabla\times v)^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}\,\varepsilon^{ijk}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{v_{(k)}}{\sqrt{g^{kk}}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{v_{(j)}}{\sqrt{g^{jj}}}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\nabla\times v)^{(r)} = r^{-1}\left[\partial v_{(z)}/\partial\theta - \partial\left(rv_{(\theta)}\right)/\partial z\right] \\ (\nabla\times v)^{(\theta)} = -\left[\partial v_{(z)}/\partial r - \partial v_{(r)}/\partial z\right] \\ (\nabla\times v)^{(z)} = r^{-1}\left[\partial\left(rv_{(\theta)}\right)/\partial r - \partial v_{(r)}/\partial\theta\right] \end{cases} \tag{135}$$

11.2 Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas podem ser definidas pela lei de transformação:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi; \\ y = r\sin\theta\sin\phi; \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{136}$$

A matriz de transformação inversa é calculada directamente a partir das relações acima dadas

$$X^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{137}$$

assim como os vectores de base natural:

$$\underset{i'}{\vec{e}} = x^i_{i'} \underset{i}{\vec{e}} \Rightarrow \begin{cases} \underset{r}{\vec{e}} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)\,; \\ \\ \underset{\theta}{\vec{e}} = r\,(\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ -\sin\theta)\,; \\ \\ \underset{\phi}{\vec{e}} = r\,(-\sin\theta\sin\phi,\ \sin\theta\cos\phi,\ 0)\,. \end{cases} \tag{138}$$

A partir dos vectores de base natural, é possível calcular as métricas covariante e contravariante:

$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \Rightarrow g^{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}, \tag{139}$$

assim como o determinante $g = \det(g_{i'j'}) = r^4\sin^2\theta$. Pela matriz da métrica covariante, conclui-se que existem apenas duas componentes a variar:

$$\begin{aligned} g_{2'2'} &= g_{2'2'}(r) = g_{2'2'}(x^{1'}), \\ g_{3'3'} &= g_{3'3'}(r,\theta) = g_{3'3'}(x^{1'}, x^{2'}), \end{aligned}$$

pelo que temos de considerar as derivadas:

$$\frac{\partial g_{2'2'}}{\partial r} = 2r; \tag{140}$$

$$\frac{\partial g_{3'3'}}{\partial r} = 2r\sin^2\theta; \tag{141}$$

$$\frac{\partial g_{3'3'}}{\partial \theta} = r^2\sin(2\theta). \tag{142}$$

Como as coordenadas esféricas são ortogonais (repare-se que a métrica é diagonal), podemos utilizar as expressões (164) para o cálculo dos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{i'}_{.i'j'} = \frac{1}{2} g^{i'i'} \frac{\partial g_{i'i'}}{\partial x^{j'}} \Rightarrow$$

$$\Gamma^{2'}_{.2'1'} = \Gamma^{2'}_{.1'2'} = \frac{1}{2} g^{2'2'} \frac{\partial g_{2'2'}}{\partial x^{1'}} = \frac{1}{2} r^{-2} 2r = r^{-1}; \tag{143}$$

$$\Gamma^{3'}_{.3'1'} = \Gamma^{3'}_{.1'3'} = \frac{1}{2} g^{3'3'} \frac{\partial g_{3'3'}}{\partial x^{1'}} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\ 2r\ \sin^2\theta = r^{-1}; \tag{144}$$

$$\Gamma^{3'}_{.3'2'} = \Gamma^{3'}_{.2'3'} = \frac{1}{2} g^{3'3'} \frac{\partial g_{3'3'}}{\partial x^{2'}} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\ 2r^2\ \sin\theta\cos\theta = \cot\theta; \tag{145}$$

$$\Gamma^{i'}_{.j'j'} = -\frac{1}{2} g^{i'i'} \frac{\partial g_{j'j'}}{\partial x^{i'}} \Rightarrow$$

$$\Gamma^{1'}_{.2'2'} = -\frac{1}{2} g^{1'1'} \frac{\partial g_{2'2'}}{\partial x^{1'}} = -\frac{1}{2} 2r = -r; \tag{146}$$

$$\Gamma^{1'}_{.3'3'} = -\frac{1}{2} g^{1'1'} \frac{\partial g_{3'3'}}{\partial x^{1'}} = -\frac{1}{2} 2r\ \sin^2\theta = -r\sin^2\theta; \tag{147}$$

$$\Gamma^{2'}_{.3'3'} = -\frac{1}{2} g^{2'2'} \frac{\partial g_{3'3'}}{\partial x^{2'}} = -\frac{1}{2} r^{-2} r^2 \sin\theta\cos\theta = -\sin\theta\cos\theta. \tag{148}$$

Todos os outros símbolos de Christoffel que não se encontram indicados, são nulos. Com base nos símbolos de Christoffel e nas métricas, podemos calcular os operadores diferenciais:

- **Gradiente**

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \overset{\vec{r}}{e} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \overset{\vec{\theta}}{e} + \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \overset{\vec{\phi}}{e} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \overset{(\vec{r})}{e} + r^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \overset{(\vec{\theta})}{e} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \overset{(\vec{\phi})}{e} \tag{149}$$

- **Divergência**[6]

$$\nabla\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}v^i\right)$$
$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta v^r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\sin\theta v^\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r^2\sin\theta v^\phi\right)\right\} \quad (150)$$

$$\nabla\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{g}\,v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}}\right)$$
$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta v^{(r)}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta v^{(\theta)}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(rv^{(\phi)}\right)\right\} \quad (151)$$

- **Laplaciano**

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right) =$$
$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\right\} \quad (152)$$

- **Rotacional**

$$(\nabla\times v)^i = \varepsilon^{ijk}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (\nabla\times v)^r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\partial v_\phi/\partial\theta - \partial v_\theta/\partial\phi\right) \\ (\nabla\times v)^\theta = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\partial v_\phi/\partial r - \partial v_r/\partial\phi\right) \\ (\nabla\times v)^\phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\partial v_\theta/\partial r - \partial v_r/\partial\theta\right) \end{array}\right. \quad (153)$$

$$(\nabla\times v)^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}\,\varepsilon^{ijk}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{v_{(k)}}{\sqrt{g^{kk}}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{v_{(j)}}{\sqrt{g^{jj}}}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (\nabla\times v)^{(r)} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\partial\left(\sin\theta v_{(\phi)}\right)/\partial\theta - \partial v_{(\theta)}/\partial\phi\right] \\ (\nabla\times v)^{(\theta)} = -\frac{1}{r\sin\theta}\left[\partial\left(r\sin\theta v_{(\phi)}\right)/\partial r - \partial v_{(r)}/\partial\phi\right] \\ (\nabla\times v)^{(\phi)} = \frac{1}{r}\left[\partial\left(rv_{(\theta)}\right)/\partial r - \partial v_{(r)}/\partial\theta\right] \end{array}\right. \quad (154)$$

[6] Por conveniência e por não suscitar confusão, deixou-se de colocar plicas nos índices das matrizes da métrica e do símbolo de Christoffel; estes continuam no entanto a dizer respeito ao referencial cilíndrico.

A Lei de transformação de $\Gamma^{i}_{.jk}$

Consideremos um vector contravariante, representado em dois sistemas de coordenadas $\vec{v} = v^i \underset{i}{\vec{e}} = v^{i'} \underset{i'}{\vec{e}}$, onde $v^{i'} = X^{i'}_{i}\ v^{i'} = v^i\ (\partial x^{i'})/(\partial x^i)$. Como se pretende que a derivada covariante seja um tensor, terá de obedecer à lei de transformação tensorial (41):

$$\nabla_{j'}\, v^{i'} = X^{i'}_{i}\, X^{j}_{j'}\, \nabla_j\, v^i \Leftrightarrow \frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} + \Gamma^{i'}_{.j'k'}\, v^{k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\nabla_j v^i. \tag{155}$$

Colocando em evidência o termo com os novos símbolos de Christoffel, temos

$$\Gamma^{i'}_{.j'k'}\, v^{k'} = \nabla_{j'}\, v^{i'} - \frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\nabla_j\, v^j - \frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}}. \tag{156}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}(v^{i'}) = X^{j}_{j'}\ \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}v^i\right) = \\
&= X^{j}_{j'}\ \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i}v^i + X^{j}_{j'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \\
&= X^{j}_{j'}\ \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i}v^i + X^{j}_{j'}X^{i'}_{i}\frac{\partial v^i}{\partial x^j}.
\end{aligned} \tag{157}$$

Substituindo (157) em (156), obtemos a lei de transformação dos símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{i'}_{.j'k'}\, v^{k'} &= X^{i'}_{i}\, X^{j}_{j'}\, \nabla_j\, v^i - X^{j}_{j'}\tfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} - X^{j}_{j'}\, X^{i'}_{i}\tfrac{\partial v^i}{\partial x^j} = \\
&= X^{i'}_{i}\, X^{j}_{j'}\ \left(\nabla_j\, v^i - \tfrac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) - X^{j}_{j'}\ \tfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i}v^i = \\
&= X^{i'}_{i}\, X^{j}_{j'}\, \Gamma^{i}_{.jk}v^k - X^{j}_{j'}\ \tfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}v^k = \\
&= \left(X^{i'}_{i}\, X^{j}_{j'}\, X^{k}_{k'}\Gamma^{i}_{.jk} - X^{j}_{j'}\, X^{k}_{k'}\ \tfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}\right) v^{k'}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{i'}_{.j'k'} = X^{i'}_{i}\, X^{j}_{j'}\, X^{k}_{k'}\, \Gamma^{i}_{.jk} - X^{j}_{j'}\, X^{k}_{k'}\ \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}. \tag{158}$$

Se multiplicarmos (158) por matrizes de transformação, de forma a isolar o primeiro termo do segundo membro da igualdade,

$$X^{i}_{i'}\, X^{j'}_{j}\, X^{k'}_{k}\, \Gamma^{i'}_{.j'k'} = \Gamma^{i}_{.jk} - X^{i}_{i'}\ \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}, \tag{159}$$

e se trocarmos os índices $(i', j', k', \rightarrow i, j, k\ ;\ i, j, k, \rightarrow i', j', k')$, temos uma outra forma de escrever a mesma lei de transformação

$$X_i^{i'}\, X_{j'}^{j}\, X_{k'}^{k}\, \Gamma^i_{.jk} = \Gamma^{i'}_{.j'k'} - X_i^{i'} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \Rightarrow \Gamma^{i'}_{.j'k'} = X_i^{i'}\, X_{j'}^{j}\, X_{k'}^{k}\, \Gamma^i_{.jk} + X_i^{i'} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}; \tag{160}$$

neste caso, calculam-se as segundas derivadas das coordenadas antigas (x^i) em ordem às novas coordenadas $(x^{i'})$.

B Fórmula para o cálculo de $\Gamma^i_{.jk}$

Usando a expressão da derivada da métrica covariante (82), podemos escrever três expressões equivalentes, através da permutação dos três índices:

$$\nabla_n g_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} - \Gamma^m_{.nj}\, g_{mk} - \Gamma^m_{.nk}\, g_{jm} = 0; \tag{161a}$$

$$\nabla_j g_{kn} = \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} - \Gamma^m_{.jk}\, g_{mn} - \Gamma^m_{.jn}\, g_{km} = 0; \tag{161b}$$

$$\nabla_j g_{jn} = \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{.kj}\, g_{mn} - \Gamma^m_{.kn}\, g_{jm} = 0. \tag{161c}$$

Ao subtrair (161a) à soma de (161b) com (161c), temos

$$-\tfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \tfrac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} + \tfrac{\partial g_{jn}}{\partial x^k} - 2\Gamma^m_{jk}\, g_{mn} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\Gamma^m_{jk}\, g_{mn}\, g^{ni} = 2\Gamma^m_{jk}\delta^i_m = g^{ni}\left\{\tfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \tfrac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} + \tfrac{\partial g_{jn}}{\partial x^k}\right\},$$

o que nos conduz a uma expressão para o cálculo do símbolo de Christoffel, a partir das matrizes da métrica

$$\Gamma^i_{.jk} = \frac{1}{2} g^{in}\left\{-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^k}\right\}. \tag{162}$$

Com a fórmula atrás obtida, é possível calcular os símbolos de Christoffel através do conhecimento prévio da métrica do sistema de coordenadas (sem ter de recorrer à lei de transformação de coordenadas).

Num espaço vectorial de três dimensões, é necessário calcular 18 símbolos de Christoffel; seriam 27, se os símbolos não fossem simétricos, nos índices covariantes: $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Como cada Γ^i_{jk} é dado por um somatório no índice n, o cálculo de cada símbolo pode ser uma tarefa com um número elevado de operações (embora as derivadas se repitam em grande número, de um símbolo de Christoffel para outro). No entanto, sempre que o referencial é ortogonal, a expressão (162) simplifica-se

$$\forall\, i \neq j,\; g_{ij} = 0 \Rightarrow \Gamma^{i}_{\cdot jk} = \frac{1}{2} g^{ii} \left\{ \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{n}} \right\}. \tag{163}$$

(Note-se que já não estamos a utilizar a convenção da soma: o facto de o índice aparecer três vezes no segundo membro da igualdade não levanta assim problemas, visto não representar um somatório.) Consoante os índices do símbolo de Christoffel a calcular são iguais ou diferentes entre si, teremos uma expressão simplificada diferente:

$$\forall\, i \neq j, i \neq k, j \neq k : \Gamma^{i}_{\cdot jk} = 0; \tag{164a}$$

$$\forall\, i \neq j : \Gamma^{i}_{\cdot ij} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^{j}}; \tag{164b}$$

$$\forall\, i \neq j : \Gamma^{i}_{\cdot jj} = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^{i}}; \tag{164c}$$

$$\text{Todos os índices iguais: } \Gamma^{i}_{\cdot ii} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^{i}}. \tag{164d}$$

C Fórmula para o cálculo de Γ_k

Consideremos o determinante da métrica covariante $g = \det[g_{ij}]$; como

$$g^{ij} = [g_{ij}]^{-1} = \frac{1}{\det[g_{ij}]} G^{ij} \tag{165}$$

(onde G^{ij} é a matrix dos cofactores de g_{ij}), temos

$$g^{ij} = \frac{1}{g} G^{ij} \Rightarrow g = \left[g^{ij}\right]^{-1} G^{ij} = g_{ij}\, G^{ij} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial g_{ik}} G^{ij} = \delta^{k}_{j} G^{ij} = G^{ik} = g\, g^{ik}. \tag{166}$$

Ao utilizar $\partial g/\partial x^{k} = (\partial g_{ij}/\partial x^{k})(\partial g/\partial g_{ij})$ e a derivada covariante da métrica covariante,

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} - \Gamma^{l}_{\cdot ki}\, g_{lj} - \Gamma^{l}_{\cdot kj}\, g_{il} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} = \Gamma^{l}_{\cdot ki}\, g_{lj} + \Gamma^{l}_{\cdot kj}\, g_{il}, \tag{167}$$

obtemos a expressão

$$\frac{\partial g}{\partial x^k}\left(\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\right)^{-1} = \Gamma^l_{.ki}\, g_{lj} + \Gamma^l_{.kj}\, g_{il} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x^k}\left(g g^{ij}\right)^{-1} = \Gamma^l_{.ki}\, g_{lj} + \Gamma^l_{.kj}\, g_{il} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = g^{ij}\left(\Gamma^l_{.ki}\, g_{lj} + \Gamma^l_{.kj}\, g_{il}\right) = \delta^i_l \Gamma^l_{.ki} + \delta^j_l\, \Gamma^l_{.kj} \;\Leftrightarrow \frac{\partial \ln g}{\partial x^k} = \Gamma^l_{.kl} + \Gamma^l_{.kl} = 2\Gamma_k, \tag{168}$$

que nos permite finalmente definir os símbolos de Christoffel contraídos em função da derivada do determinante da métrica:

$$\Gamma_k = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial x^k} \Leftrightarrow \Gamma_k = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k}. \tag{169}$$

Exercícios propostos

1. Escreva em notação indicial:

$$\text{a)}\ \left\|\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}\right\|,\qquad \text{b)}\ \left\|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right\|,\qquad \text{c)}\ \left\|\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)\right\|.$$

2. Usando notação indicial, mostre que:

$$\text{a)}\quad \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\times\left(\vec{D}\times\vec{E}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\left[\vec{E}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]-\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right)\left[\vec{D}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right].$$

$$\text{b)}\quad \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left[\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\right]=$$
$$=\left[\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]\left[\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\right]-\left[\vec{A}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\right]\left[\vec{B}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right].$$

3. Considere em $\Re^2$ a transformação de coordenadas

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}\,y, \\ y' = -\sqrt{3}\,x + y + 1. \end{cases}$$

   a) Determine as componentes dos vectores de base natural e dual de (x', y') em (x, y).
   b) Represente-as geometricamente em (x, y) na origem do referencial (x', y').
   c) Determine as componentes físicas do vector $V^i = (1, 1)$ de peso 1, no referencial (x', y').

4. Considere a transformação de coordenadas $x^i \mapsto x^{i'}$ definida em $\Re^2$ por

$$\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = -4x + 2y. \end{cases}$$

Determine:

   a) As componentes dos vectores de base natural e dual de (x, y) em (x', y'):

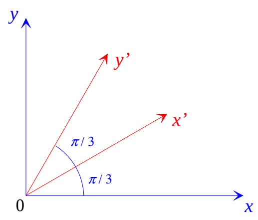
$$\underset{i}{\vec{e}} = \underset{i}{e}^{i'}\underset{i'}{\vec{e}};\ \overset{\vec{i}}{e} = \overset{i}{e}_{i'}\overset{\vec{i'}}{e}.$$

   b) As matrizes da métrica covariante e contravariante do ref. (x', y').
   c) O vector $V^{j'}$ associado a $V_{j'}$, sabendo que $V_j = (1, 1)$ de peso 2.

d) A matriz $A_{i'j'}$ associada a $A^{i'j'}$, sabendo que A é um tensor covariante absoluto de ordem 2, representado pela matriz

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Com base na figura dada:



a) Determine as componentes dos vectores de base natural do novo referencial sabendo que a base é normada.

b) Calcule as matrizes de transformação $X^i_{i'}$ e $X^{i'}_i$.

c) Determine os vectores de base dual e represente-os geometricamente.

d) Calcule os tensores da métrica covariante e contravariante.

e) Calcule as novas componentes $v^{i'}$ sabendo que $v_i = (1, 2)$.

6. Dadas as componentes cilíndricas dos vectores absolutos $v^i = (1, 3, 2)$ em $P = (1, \pi/4, 1)$ e $u_i = (1, -1, 0)$ em $Q = (1, \pi/2, 1)$, em que $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, z)$, calcule:

a) O produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) As componentes contravariantes do produto externo de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$, i.e. $(\vec{u} \times \vec{v})^i$ no ponto Q.

c) As componentes covariantes do produto externo de $\vec{v}$ e de $\vec{u}$, i.e. $(\vec{v} \times \vec{u})_i$ no ponto P.

7. Considere a transformação de coordenadas

$$x' = \exp\left[-(x+y)^2\right],\ y' = \exp\left[-(x-y)^2\right],$$

definida num subconjunto admissível de $\Re^2$. Determine:

a) Os vectores de base natural e dual de (x', y') em (x, y) no ponto $P = (0, 1)$.

b) A matriz da métrica contravariante $g^{i'j'}$ em função de x e y.

c) As componentes contravariantes do vector $\vec{V}$, sabendo que as suas componentes covariantes são: $V_{x'} = (x+y)^{-2}$ e $V_{y'} = (x-y)^{-2}$.

8. Considere o sistema de coordenadas em que (x, y) é o sistema de coordenadas cartesianas:

$$x' = \ln(x+y), \; y' = \ln(y-x).$$

Calcule:

a) As matrizes de transformação directa e inversa.

b) Os vectores de base natural e dual, de (x', y') em (x, y).

c) As matrizes das métricas covariante e contravariante de (x', y').

d) o vector $A^{i'}$ de peso $+1$, sabendo que $A_i = (0, 1)$.

e) Indique se o novo sistema de coordenadas é ortogonal.

9. Dada a transformação de coordenadas

$$\begin{cases} x = 2\eta\xi, \\ y = \eta^2 - \xi^2, \end{cases}$$

em que (x, y) é o sistema de coordenadas cartesianas, determine:

a) As matrizes de transformação directa e inversa.

b) Os vectores de base natural e dual, de (ξ, η) em (x, y) e vice-versa.

c) As matrizes das métricas covariante em (ξ, η). Diga com base na matriz da métrica calculada se os vectores de base são ortogonais ou não.

d) O vector polar $v^{i'}$, sendo dado $v^i = (1, -1)$, no ponto $P = (\xi, \eta) = (0, 1)$. Represente geometricamente os vectores de base $\underset{i'}{\vec{e}}$ e o vector $v^{i'}$ no ponto P.

10. Seja a mudança de base em $\Re^2$,

$$\begin{cases} \underset{1'}{\vec{e}} = 2\underset{1}{\vec{e}} - \underset{2}{\vec{e}}, \\ \underset{2'}{\vec{e}} = \underset{2}{\vec{e}} - \underset{1}{\vec{e}}, \end{cases}$$

em que $\left\{\underset{1}{\vec{e}}, \underset{2}{\vec{e}}\right\}$ é a base canónica.

a) Represente graficamente a base dual $\left\{\overset{\vec{1'}}{e}, \overset{\vec{2'}}{e}\right\}$.

b) Sejam $u_{i'} = (-1, 1)$ e $v^{i'} = (-1, 2)$. Calcule o produto interno $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $\|v\|$.

c) Determine uma base ortonormada $\left\{ \underset{1''}{\vec{e}}, \underset{2''}{\vec{e}} \right\}$ para a qual o tensor $t^{i'j'} \equiv v^{i'} v^{j'}$ tenha uma representação matricial do tipo

$$t^{i'j'} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e escreva a matriz correspondente.

11. Determine os símbolos de Christoffel para a transformação de coordenadas

$$\begin{cases} x' = e^{x+y}, \\ y' = e^{x-y}. \end{cases}$$

12. Dados os vectores $V^i = (r, r\theta)$ e $W^i = (r^2, r\theta)$ em coordenadas polares, determine:

 a) As suas derivadas covariantes $\nabla_j V^i$ e $\nabla_j W^i$.
 b) A divergência de V^i, no ponto $(\rho, \theta) = (3, \pi/3)$
 c) As componentes covariantes do rotacional de W^i.

13. Considere um sistema de coordenadas (x, y) em que a matriz da métrica covariante é

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

Determine:

 a) Todos os símbolos de Christoffel.
 b) As componentes da derivada covariante de $u^i = (x, y)$.
 c) A divergência de u^i, no ponto $P = (1, 1)$.

14. Considere uma nova transformação de coordenadas:

$$\begin{cases} x = x' / \left(x'^2 + y'^2\right), \\ y = y' / \left(x'^2 + y'^2\right), \end{cases}$$

em que (x, y) são as coordenadas cartesianas. As matrizes de transformação directa e inversa, e a matriz métrica covariante da transformação de coordenadas, são respectivamente:

$$
\begin{aligned}
X_i^{i'} &= \begin{pmatrix} y'^2 - x'^2 & -2x'y' \\ -2x'y' & x'^2 - y'^2 \end{pmatrix}, \\
X_{i'}^{i} &= \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} y'^2 - x'^2 & -2x'y' \\ -2x'y' & x'^2 - y'^2 \end{pmatrix}, \\
g_{i'j'} &= \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(onde se utilizou $R \equiv R(x', y') \equiv x'^2 + y'^2$).

a) Determine os pontos, caso existam, onde os vectores da nova base têm norma igual à unidade e diga, justificando, se o novo sistema de coordenadas é ortogonal.

b) Determine os vectores de base $\overset{\vec{i}}{e}$ quando escritos na base $\overset{\vec{i'}}{e}$ e as componentes dos vectores de base $\underset{i'}{\vec{e}}$ quando escritos na base $\underset{i}{\vec{e}}$.

c) Sejam os vectores $v^{i'} = (1, 1)$ e $w^{i'} = (-1, 3)$ aplicados no ponto $(x', y') = (1, 2)$. Calcule $\vec{v} \cdot \vec{w}$, v^i, $v_{i'}$ e v_i.

d) Determine a aceleração no novo sistema de coordenadas no caso de uma partícula com velocidade dada por $\vec{u} = x'^3 \underset{x'}{\vec{e}}$.

15. O movimento de uma partícula de massa unitária ($m = 1$) é descrito em coordenadas polares pelas equações do movimento

$$
\theta(t) = \exp(t) - 1, \qquad r(t) = 1 + \cos\left[\theta(t)\right].
$$

Calcule:

a) As componentes físicas polares do vector velocidade, quando $t = \ln(1 + \pi/2)$.

b) As componentes físicas polares do vector aceleração, no mesmo instante.

16. Considere em coordenadas cilíndricas os vectores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ de componentes contravariantes

$$
A^i = (\rho, 1, 0), \;\; B^i = (0, 1, 0).
$$

Calcule:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$;

b) $\vec{A} \times \vec{B}$;

c) $\nabla_\theta A^\rho; \nabla_\theta A^\theta; \nabla_\theta B^\theta$.

17. Considere no plano as coordenadas bi-polares definidas por

$$x = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha + \cos\beta},\ y = \frac{\sin\beta}{\cosh\alpha + \cos\beta},$$

com $-\infty < \alpha < +\infty$ e $0 \leq \beta \leq \pi$. Determine:

a) Os símbolos de Christoffel.

b) A base física.

c) As componentes físicas dos vectores velocidade e aceleração.

18. Considere a transformação de coordenadas:

$$x' = \cos(x+y),\ y' = \cos(x-y).$$

Calcule:

a) $\vec{U} \cdot \vec{V}$, sendo U^i absoluto definido no referencial (x, y) por $U^i = (4, 3)$ e $V^{i'} = (3, 0)$.

b) $\Gamma^{x'}_{x'x'}$ e $\nabla^{x'}_{x'}$ no ponto $x = 1$, $y = 1$.

19. Dados os vectores $V^i = (\phi, \rho, \rho\phi)$ e $W_i = (\rho^3, \rho\theta, \rho)$ em coordenadas esféricas, determine as suas derivadas covariantes: $\nabla_j V^i$ e $\nabla_j \omega^i$.

20. Considere o sistema de coordenadas $x = x'^2 - y'^2; y = 2x'^2 y'^2$, em que (x, y) é o sistema de coordenadas cartesianas. Determine:

a) As componentes dos vectores de base natural de (x', y') em (x, y).

b) As matrizes das métricas covariante e contravariante de (x', y').

c) Os símbolos de Christoffel do novo referencial.

d) As componentes físicas do novo referencial da força total aplicada numa partícula de massa $m = 2$kg, sabendo que a sua velocidade é dada no ponto ($x' = 2$m, $y' = 2$m) por $\vec{v} = \dot{x}' \underset{x'}{\vec{e}}$.

e) Verifique que o rotacional de $\vec{v}$ é nulo em qualquer ponto, sabendo que

$$\vec{u} = x' \overset{\overrightarrow{x'}}{e} + y' \overset{\overrightarrow{y'}}{e}.$$

21. Considere um novo sistema de coordenadas, em que a métrica covariante é dada por $g_{i'j'} = \exp(x'^2 + y'^2)\delta_{i'j'}$. Determine:

   a) Os símbolos de Christoffel do novo referencial.

   b) As componentes contravariantes da aceleração de uma partícula no instante $t = 1s$, sabendo que a sua posição é dada por $x^{1'} = t^2; x^{2'} = 10t$.

22. Sendo dada a matriz de transformação de coordenadas curvilíneas

$$X_i^{i'} = \begin{pmatrix} 2x & -y \\ -y & y/x \end{pmatrix},$$

   determine:

   a) A matriz da métrica covariante $g_{i'k'}$ no ponto $P^i = (2,1)$.

   b) A matriz da métrica contravariante $g^{j'n'}$ no ponto $Q^\alpha = (1,2)$.

   c) As matrizes transferidoras $T_{\alpha'}^{i'}$ e $T_{i'}^{\alpha'}$.

   d) $U_{i'}$ sendo dado $U^{i'} = (1,1)$ no ponto P.

   e) $V_{\alpha'}$ sendo dado $V_{\alpha'} = (1,1)$ no ponto Q.

23. Dada a transformação de coordenadas em $\Re^3$: $x' = 2x^2; y' = 2y^2; z' = z$, determine:

   a) As matrizes de transformação directa e inversa.

   b) $\underset{i}{e}^{i'}$, $\underset{i'}{e}^{i}$, $\overset{i'}{e}_i$, $\overset{i}{e}_{i'}$, $\underset{j}{e}^{i}$, $\overset{j}{e}_i$, $\underset{j}{e}^{i'}$ e $\overset{j'}{e}_{i'}$.

   c) Os tensores das métricas covariante e contravariante.

   d) Os símbolos de Christoffel. Prove que existem apenas dois símbolos não nulos.

   e) A aceleração nas novas coordenadas.

24. Seja a transformação de coordenadas definida pelo sistema dado, onde θ é um parâmetro e (x, y, z) são as coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)\,x + (\sin\theta)\,y, \\ y' = (-\sin\theta)\,x + (\cos\theta)\,y, \\ z' = \theta\ln(z). \end{cases}$$

a) Calcule a matriz de transformação $X_i^{i'}$ e determine as componentes dos vectores de base dual do novo referencial escritos na base cartesiana, e dos vectores de base natural do referencial cartesiano, escritos na nova base.

b) Determine $g^{i'j'}$ e $g_{i'j'}$ (sugestão: determine $g^{i'j'}$ em primeiro lugar).

c) Determine justificando se a base de (x', y', z') é ortogonal e/ou normada.

d) Seja o vector absoluto $C^i = (1, 1, 2)$. Calcule $C^{i'}$ e $C_{i'}$ quando $x = 2, y = 2, z = 1$, e $\theta = \pi/4$.

e) Prove que todos os símbolos de Christoffel $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ na nova base são nulas excepto $\Gamma^{3'}_{3'3'} = \Gamma^{z'}_{z'z'}$ e determine-os.

Bibliografia

Aris, R. 1962. *Vectors, tensors and basic equations of fluid mechanics*, Prentice-Hall.

Campos, L. M. B. C. 1992. *Geometria Tensorial e Mecânica Clássica*, Secção de Folhas da AEIST.

Flügge, W. 1972. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*, Springer.

Gil, P. J. S. & Lau, F. J. P. 2002. *Elementos de Multiplicidades*, Notas para cadeira de Mecânica Aplicada I.

Sokolnikoff, I. S. 1964. *Tensor Analysis*, John Wiley & Sons.

Spiegel, M. R. 1959. *Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill.

Índice remissivo