Teste N.º 1

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\,\cos b + \operatorname{sen} b\,\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Considere todos os números de seis algarismos diferentes que se podem formar utilizando os algarismos de 1 a 9.

Quantos desses números são pares e têm exatamente dois algarismos primos?

(A) 1800

(B) 2880

(C) 8640

(D) 10 440

2. De uma certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos três primeiros elementos é $2\ 045\ 254$.

Qual é a soma de todos os elementos dessa linha com todos os elementos da linha seguinte?

(A) 2^{2022}

(B) 2^{4045}

(C) 2×2^{2022}

(D) 3×2^{2022}

3. As Olimpíadas Portuguesas de Matemática são um concurso de problemas de matemática dirigidos a alunos do 1.º ao 12.º anos de escolaridade de todo o país.

De uma determinada escola do Porto, passaram à fase final cinco alunos do sexo masculino e sete do sexo feminino.

A comitiva vai deslocar-se para participar na final nacional realizada em Lisboa, por via terrestre, utilizando um automóvel de cinco lugares e uma carrinha de onze lugares.

A comitiva é constituída pelo diretor da escola (que não é professor), três professores com carta de condução, os cinco alunos do sexo masculino e os sete do sexo feminino.

3.1. Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir e de sentar os dezasseis elementos da comitiva pelos dezasseis lugares disponíveis, de modo que os condutores sejam professores e que, no automóvel, sigam dois alunos de cada sexo.

3.2. Considere agora que se pretende tirar uma fotografia com todos os elementos da comitiva.

O diretor da escola é casado com uma das professoras que faz parte da comitiva, mas o casal não gosta de ficar junto nas fotografias dos eventos da escola.

Determine a probabilidade de, colocando-se de forma aleatória todos os elementos lado a lado para uma fotografia, este casal não ficar junto. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Seja n um número natural, com $n > 4$.

Sem recorrer à calculadora, exceto para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva a seguinte equação.

$$^{2023}C_1 \times {}^{n}C_5 = \frac{2023! \times 7}{2022! \times 15} \times {}^{n-2}A_3$$

5. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E \text{ e } B \subset E)$. Sabe-se que:

- $P(B) = 0{,}35$
- $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}15$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}35$

O valor da probabilidade condicionada $P\left(\bar{B} | (A \cup B)\right)$ é igual a:

(A) $\frac{4}{13}$ **(B)** $\frac{5}{13}$ **(C)** $\frac{6}{13}$ **(D)** $\frac{7}{13}$

6. Numa determinada escola secundária, relativamente aos alunos de uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- 40% dos alunos são do sexo feminino;
- $\frac{1}{4}$ das raparigas praticam desporto de competição;
- a terça parte dos alunos que praticam desporto de competição é do sexo feminino.

6.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno desta turma.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser um rapaz que não pratica desporto de competição. Apresente o resultado na forma de percentagem.

6.2. O Gustavo é o delegado dessa turma.

Escolhe-se, ao acaso, uma comissão constituída por dois alunos dessa turma.

Sabe-se que a probabilidade de a comissão escolhida ser constituída por alunos de sexos distintos e não incluir o Gustavo é igual a $\frac{88}{190}$.

Seja n o número total de alunos dessa turma.

Determine o valor de n.

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

7. Considere que a turma 12X tem n alunos (com n número natural par), que todos os alunos têm telemóvel e que levam um único telemóvel para a escola. Considere ainda que metade da turma é constituída por raparigas.

À entrada da sala de aula existe uma mesa onde os alunos deixam o seu telemóvel numa fila, e por ordem, à medida que vão chegando.

Num dia em que todos os alunos da turma estão presentes, de quantas maneiras podem estar dispostos os telemóveis em fila, de modo que os telemóveis das raparigas fiquem todos juntos?

(A) $\left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2}\right)!$

(B) $\left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2}\right)! \times 2$

(C) $\left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2}+1\right)!$

(D) $\left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2}+1\right)! \times 2$

8. Considere dois números naturais n e p tais que $p+1 \leq n$.

Sabe-se que:

- ${}^{n+1}C_{p+1} = x$
- ${}^{n+1}C_{p+2} = y$

O valor de ${}^{n+2}C_{p+2} + {}^{n+2}C_{n-p}$ é igual a:

(A) $x + y$

(B) $2x + y$

(C) $x + 2y$

(D) $2x + 2y$

9. Numa turma de 12.º ano com 30 alunos, sabe-se que todos os alunos têm uma e uma só máquina de calcular de uma de três marcas: 15 alunos têm uma calculadora da marca *T*, 10 alunos têm uma calculadora da marca *C* e 5 alunos têm uma calculadora da marca *N*.

A expressão seguinte permite determinar de quantas maneiras podem ser escolhidos 5 alunos, de modo que pelo menos 2 deles possuam uma máquina de calcular da marca *T*:

$${}^{30}C_5 - {}^{15}C_5 - 15 \times {}^{15}C_4$$

Explique esta expressão no contexto descrito.

10. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos independentes $(A \subset E \; e \; B \subset E)$.

Sabe-se que A e B têm ambos probabilidade não nula.

Prove que:

$$P(A \cup B) - P(B|A) - P\left((\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (A \cup B)\right) = P(A)P(\bar{B})$$

11. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{x^4}{2} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$, com $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, ordenado segundo potências decrescentes da primeira parcela.

Sabe-se que $\frac{7}{16}x^{21}$ é o terceiro termo desse desenvolvimento.

Determine o valor de n.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**TOTAL**
10	10	18	18	18	10	18	20	10	10	18	20	20	**200**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

___ ___ ___ ___ ___ 2 ou ___ ___ ___ ___ ___ 4,6 ou 8

$^3C_1 \times {}^5C_4 \times 5!$ + $^4C_2 \times {}^4C_3 \times 5! \times 3$

= 1800 + 8640 =

= 10 440

2. Opção (D)

$$1 + n + {}^nC_2 = 2\,045\,254 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 2\,045\,254$$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 2\,045\,254$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 4\,090\,508$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 4\,090\,506 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-4\,090\,506)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 2022 \quad \vee \quad n = -2023$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 2022$.

A soma de todos os elementos da linha $n = 2022$ é 2^{2022} e a soma de todos os elementos da linha seguinte ($n = 2023$) é 2^{2023}.

Assim, a soma de todos os elementos destas duas linhas é:

$2^{2022} + 2^{2023} = 2^{2022} + 2 \times 2^{2022} = 2^{2022}(1+2) = 3 \times 2^{2022}$

3.

3.1. $^3C_2 \times 2 \times {}^5C_2 \times {}^7C_2 \times 4! \times 10!$

3.2. Número de casos possíveis: 16!

Número de casos favoráveis: 16! – 2! × 15!

$\underbrace{\_D\_ \quad \_P\_}_{2!}$ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

$\times\, 15!$

2! × 15! é o número de maneiras de o casal ficar junto na fotografia.

A probabilidade pretendida é, então, igual a:

$$\frac{16! - 2! \times 15!}{16!} = \frac{7}{8}$$

4. $^{2023}C_1 \times {}^{n}C_5 = \frac{2023!\times 7}{2022!\times 15} \times {}^{n-2}A_3 \Leftrightarrow 2023 \times \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{2023\times 2022!\times 7}{2022!\times 15} \times \frac{(n-2)!}{(n-2-3)!}$

$\Leftrightarrow \frac{2023n!}{120(n-5)!} = \frac{2023\times 7\times (n-2)!}{15\times (n-5)!}$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{120\times 7}{15}$

$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{(n-2)!} = 56$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-56)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1\pm\sqrt{225}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1+15}{2} \quad \vee \quad n = \frac{1-15}{2}$

$\Leftrightarrow n = 8 \quad \vee \quad n = -7 \notin$ IN

C.S. $= \{8\}$

5. Opção (C)

Sabemos que:

- $P(B) = 0{,}35$
- $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}35$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}35 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}35 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}35 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}65$

$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15 \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0{,}15 \Leftrightarrow 0{,}35 - 0{,}15 = P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$

Pretendemos determinar:

$$P\left(\overline{B}\middle|(A \cup B)\right) = \frac{P(\overline{B}\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P\left((\bar{B} \cap A) \cup \overbrace{(\bar{B} \cap B)}^{\emptyset}\right)}{P(A\cup B)} =$$

$$= \frac{P((\bar{B} \cap A))}{P(A\cup B)} =$$

$$= \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A\cup B)} =$$

$$= \frac{0{,}5-0{,}2}{0{,}65} =$$

$$= \frac{0{,}3}{0{,}65} =$$

$$= \frac{30}{65} =$$

$$= \frac{6}{13}$$

Cálculo auxiliar

$0{,}65 = P(A) + 0{,}35 - 0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}65 = P(A) + 0{,}15$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}5$

6.

6.1 Consideremos os seguintes acontecimentos:

F: "Ser do sexo feminino."

C: "Praticar desporto de competição."

Sabe-se que:

- $P(F) = 0{,}4$
- $P(C|F) = \frac{1}{4}$
- $P(F|C) = \frac{1}{3}$

$$P(C|F) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(C \cap F)}{0{,}4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(C \cap F) = 0{,}1$$

$$P(F|C) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0{,}1 = \frac{1}{3}P(C)$$

$$\Leftrightarrow P(C) = 0{,}3$$

Organizando os dados numa tabela:

	F	$\overline{F}$	**Total**
C	0,1		0,3
$\overline{C}$			
Total	0,4		1

$P(\overline{C} \cap F) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$

$P(\overline{C}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(\overline{C} \cap \overline{F}) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4;\ \ 40\%$

A probabilidade pedida é igual a 40%.

6.2 $0{,}4n \rightarrow$ número de raparigas da turma

$0{,}6n \rightarrow$ número de rapazes da turma

$$\frac{0{,}4n \times (0{,}6n - 1)}{{}^{n}C_2} = \frac{88}{190} \Leftrightarrow \frac{190 \times 0{,}4n \times (0{,}6n - 1)}{\frac{n(n-1)}{2}} = 88$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \times 190 \times 0{,}4n \times (0{,}6n - 1)}{n(n-1)} = 88$$

$$\Leftrightarrow 152(0{,}6n - 1) = 88n - 88$$

$$\Leftrightarrow 91{,}2n - 88n = -88 + 152$$

$$\Leftrightarrow 3{,}2n = 64$$

$$\Leftrightarrow n = 20$$

7. Opção (C)

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{\substack{\frac{n}{2}\text{ telemóveis}\\ \text{das raparigas}}} \qquad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{\substack{\frac{n}{2}\text{ telemóveis}\\ \text{dos rapazes}}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{\substack{\left(\frac{n}{2}\right)!\text{ é o número de maneiras}\\ \text{de os telemóveis das raparigas estarem}\\ \text{juntos e permutarem entre si}}} \qquad \_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{\substack{\left(\frac{n}{2}+1\right)!\text{ é o número de maneiras}\\ \text{de os telemóveis dos rapazes permutarem}\\ \text{entre si e entre o bloco dos telemóveis}\\ \text{das raparigas que estão juntos}}}$$

8. Opção (D)

$$\begin{aligned}
{}^{n+2}C_{p+2} + {}^{n+2}C_{n-p} &= {}^{n+2}C_{p+2} + \underbrace{{}^{n+2}C_{n-p}}_{{}^{n+2}C_{(n+2)-(n-p)}} = \\
&= {}^{n+2}C_{p+2} + {}^{n+2}C_{p+2} = \\
&= 2 \times \underbrace{{}^{n+2}C_{p+2}}_{{}^{n+1}C_{p+1}+{}^{n+1}C_{p+2}} = \\
&= 2(x+y) = \\
&= 2x + 2y
\end{aligned}$$

9. ${}^{30}C_5$ é o número de maneiras de escolher cinco alunos, de entre os 30 alunos da turma sem qualquer restrição.

Se ao número de possibilidades de escolher quaisquer cinco alunos retirarmos o número de possibilidades de não ter nenhum aluno com uma calculadora da marca T e exatamente um aluno com uma calculadora da marca T, obtemos o número de possibilidades de ter pelo menos dois alunos com uma calculadora da marca T.

Assim, ${}^{15}C_5$ é o número de maneiras de escolher cinco alunos que possuem calculadoras da marca C (10 alunos) ou N (5 alunos), e que, portanto, não possuem calculadora da marca T.

$15 \times {}^{15}C_4$ é o número de maneiras de escolher exatamente um aluno com uma calculadora da marca T, pois pode ser escolhido qualquer um dos 15 alunos que possuem uma calculadora da marca T, e, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{15}C_4$ formas de escolher quatro alunos que possuem calculadoras da marca C (10 alunos) ou N (5 alunos).

A expressão ${}^{30}C_5 - {}^{15}C_5 - 15 \times {}^{15}C_4$ permite então determinar de quantas maneiras podem ser escolhidos cinco alunos, de modo que pelo menos dois deles possuam uma máquina de calcular da marca T.

10. $P(A \cup B) - P(B|A) - P\left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap (A \cup B)\right) = P(A \cup B) - P(B) - P\left(\left(\overline{A \cup B}\right) \cap (A \cup B)\right) =$

$= P(A \cup B) - P(B) - P(\emptyset) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(B) - 0 =$

$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) - P(B) =$

$= P(A) - P(A) \times P(B) =$

$= P(A)[1 - P(B)] =$

$= P(A) \times P(\overline{B})$ c.q.d.

11. O termo geral do desenvolvimento de $\left(\frac{x^4}{2} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$, com $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, ordenado segundo potências decrescentes da primeira parcela, é ${}^nC_k \times \left(\frac{x^4}{2}\right)^{n-k} \times \left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^k$, com $k \in \{0,1, \dots, n\}$.

$${}^nC_k \times \left(\frac{x^4}{2}\right)^{n-k} \times \left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^k = {}^nC_k \times 2^{-n+k} \times x^{4n-4k} \times (-1)^k \times x^{-k} \times x^{-\frac{k}{2}} =$$

$$= {}^nC_k \times 2^{-n+k} \times (-1)^k \times x^{4n-\frac{11k}{2}}$$

Sabe-se que $\frac{7}{16}x^{21}$ é o terceiro termo desse desenvolvimento, ordenado segundo potências decrescentes da primeira parcela. Logo, ${}^nC_2 \times 2^{-n+2} \times (-1)^2 \times x^{4n-11} = \frac{7}{16}x^{21}$.

Então:

$$\begin{cases} 4n - 11 = 21 \\ {}^nC_2 \times 2^{-n+2} \times (-1)^2 = \dfrac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n = 32 \\ {}^nC_2 \times 2^{-n+2} \times (-1)^2 = \dfrac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ {}^nC_2 \times 2^{-n+2} \times (-1)^2 = \dfrac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ {}^8C_2 \times 2^{-6} = \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ \frac{28}{64} = \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow n = 8$$