Teste de Matemática A

2023 / 2024

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Expoente[10] | Daniela Raposo e Luzia Gomes
Com colaboração de Daniela Breda

1. Considere, para quaisquer valores reais positivos a e b, as afirmações:

I. $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})-\left(a-b^{\frac{1}{2}}\right)^2=-2b+2a\sqrt{b}$

II. $\left(a^{\frac{2}{5}}\div a^{-\frac{1}{10}}\right)\left(b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt{ab}$

Podemos afirmar que:

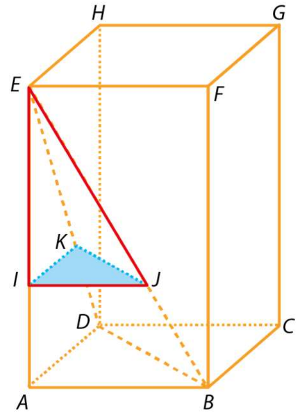
(A) são ambas verdadeiras.

(B) apenas a afirmação II é verdadeira.

(C) apenas a afirmação I é verdadeira.

(D) são ambas falsas.

2. Na figura estão representados o prisma reto $[ABCDHEFG]$ de base quadrada $[ABCD]$ e as pirâmides triangulares, $[ABDE]$ e $[IJKE]$, cujas bases $[ABD]$ e $[IJK]$ estão contidas em planos paralelos.



Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que:

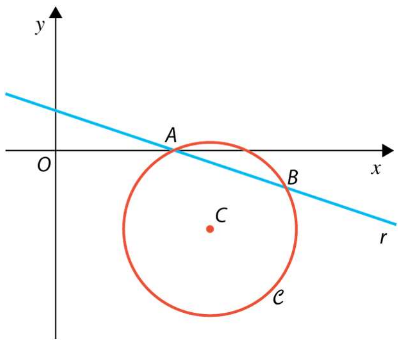
- os vértices I e J da pirâmide $[IJKE]$ pertencem, respetivamente, às arestas $[AE]$ e $[BE]$ da pirâmide $[ABDE]$;
- $\overline{IJ}=\sqrt{6}$;
- $\overline{AB}=\sqrt{3}+2$;
- a área da face lateral $[IJE]$ é $3\sqrt{3}$.

A figura não está desenhada à escala.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine o valor exato e simplificado do volume do prisma $[ABCDHEFG]$.

Apresente todos os cálculos que efetuar.

3. Considere, no referencial o.n. Oxy da figura:



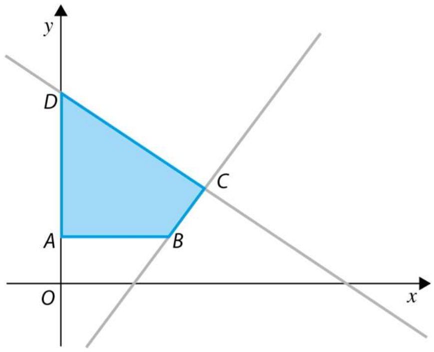
- a circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto C de coordenadas $(4,-2)$;
- o ponto A, o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox de menor abcissa;
- o ponto B, que pertence à circunferência $\mathcal{C}$;
- a reta r, que contém os pontos A e B, cuja equação reduzida é $y=-\frac{x}{3}+1$.

3.1 Mostre que a equação reduzida da circunferência $\mathcal{C}$ é $(x-4)^2+(y+2)^2=5$.

3.2 Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto B.

3.3 Escreva uma equação vetorial da reta paralela à reta r e que passa pelo ponto C.

4. Na figura estão representados, num referencial ortonormado Oxy, o quadrilátero $[ABCD]$, a reta BC e a reta CD.



Sabe-se que:

- os pontos A e D pertencem ao eixo Oy e têm, respetivamente, ordenada 2 e 8;
- o ponto B tem a mesma ordenada que o ponto A;
- o ponto C tem coordenadas $(6\,,4)$;
- a reta BC é definida pela equação $y = \frac{4}{3}x - 4$.

Qual das seguintes condições define o conjunto de pontos da região a sombreado, incluindo as fronteiras?

(A) $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq \frac{4}{3}x - 4 \wedge \ y \geq 2 \wedge y \leq -\frac{2}{3}x + 8$

(B) $x \geq 0 \ \wedge \ y \leq \frac{4}{3}x - 4 \wedge \ y \geq 2 \wedge y \geq -\frac{2}{3}x + 8$

(C) $x \geq 0 \ \wedge \ y \leq \frac{4}{3}x - 4 \wedge \ y \geq 2 \wedge y \geq -\frac{4}{3}x + 8$

(D) $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq \frac{4}{3}x - 4 \wedge \ y \geq 2 \wedge y \leq -\frac{4}{3}x + 8$

5. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, os pontos A e B de coordenadas $(1,-3)$ e $(4,-1)$, respetivamente.

5.1 Escreva a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

5.2 Seja B o ponto médio de um segmento de reta $[AC]$.

Indique em qual das seguintes opções se encontram as coordenadas do ponto C.

(A) $(7,-1)$ **(B)** $(-7,-1)$ **(C)** $(-7,1)$ **(D)** $(7,1)$

5.3 Considere a circunferência de centro no ponto B e raio 3.

Sejam D e E os pontos dessa circunferência com menor abcissa e maior ordenada, respetivamente.

Determine o valor exato da área do quadrado de lado $[DE]$.

6. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, o ponto P de coordenadas $(m^2 - 3m, 16 - 5m)$, sendo m um número real.

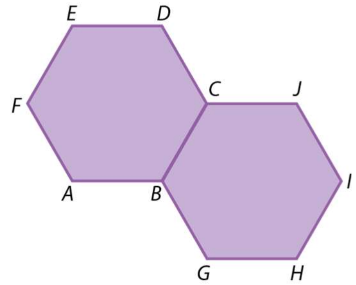
Sendo P um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes pares, indique em qual das opções seguintes se encontra o valor de m.

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** -2 **(D)** -4

7. Considere a figura ao lado, onde se encontram representados dois hexágonos regulares geometricamente iguais, $[ABCDEF]$ e $[BCJIHG]$.

O lado $[BC]$ é comum a ambos os hexágonos.

Qual das seguintes afirmações é falsa?



(A) $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{GE}$ **(B)** $F + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CH} = B$

(C) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{EA}$ **(D)** $\|\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JH}\| = 2\|\overrightarrow{AB}\|$

8. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, os pontos A e B de coordenadas $(2, -1)$ e $(1, -4)$, respetivamente.

Seja o ponto C, tal que $C = B + 2\overrightarrow{BA}$

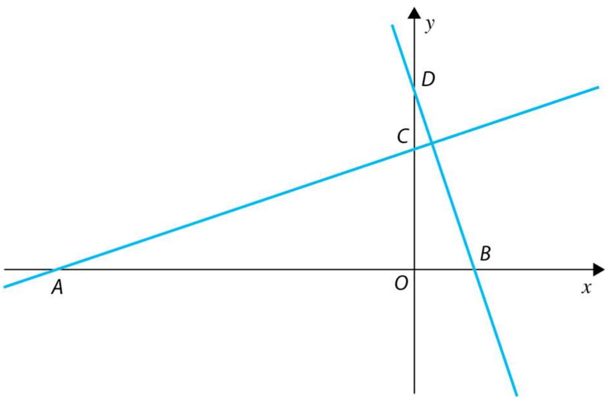
Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$, colinear com $\overrightarrow{BC}$, de sentido contrário ao de $\overrightarrow{BC}$ e de norma igual a $3\sqrt{2}$.

Apresente os valores das coordenadas sob a forma de fração com o denominador racionalizado.

9. No referencial o.n. Oxy da figura estão representados os pontos A, B, C e D e as retas AC e DB.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Ox;
- os pontos C e D pertencem ao semieixo positivo Oy;
- $\overline{OA} = 2\overline{OD}$;
- $\overline{OB} = \frac{\overline{OD}}{3}$;
- $\overline{OB} = \overline{CD}$.



Seja m o declive da reta AC e n o declive da reta DB, $(m,n \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Prove que $m \times n = -1$.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**4.**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**Total**
10	18	18	20	18	10	20	10	18	10	10	18	20	**200**

Teste N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

I. $\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)-\left(a-b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}=$

$=a^2-b-\left(a^2-2ab^{\frac{1}{2}}+b^{2\times\frac{1}{2}}\right)=$

$=a^2-b-a^2+2ab^{\frac{1}{2}}-b=$

$=-2b+2a\sqrt{b}$

II. $\left(a^{\frac{2}{5}}\div a^{-\frac{1}{10}}\right)\left(b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=$

$=a^{\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{10}\right)}\times b^{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=$

$=a^{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}}\times b^{\frac{1}{2}}=$

$=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}=$

$=(a\times b)^{\frac{1}{2}}=$

$=\sqrt{ab}$

Assim, podemos afirmar que ambas as afirmações são verdadeiras.

2. $A_{[IJE]}=3\sqrt{3}$

Logo, $\frac{\sqrt{6}\times\overline{IE}}{2}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{6}\times\overline{IE}=6\sqrt{3}\Leftrightarrow\overline{IE}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\overline{IE}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\overline{IE}=\frac{6}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\overline{IE}=\frac{6\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\overline{IE}=3\sqrt{2}$

As faces $[ABE]$ e $[IJE]$, são semelhantes, pelo que $\frac{\overline{IE}}{\overline{IJ}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$

Assim, $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\overline{AE}}{\sqrt{3}+2}\Leftrightarrow\overline{AE}=\frac{3\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}+2\right)}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\overline{AE}=\frac{3\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\overline{AE}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}+\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\overline{AE}=3+\frac{6}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\overline{AE}=3+\frac{6\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\overline{AE}=3+2\sqrt{3}$

$V_{[ABCDEFGH]}=\left(\overline{AB}\right)^2\times\overline{AE}$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=\left(\sqrt{3}+2\right)^2\times\left(3+2\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=\left(3+4\sqrt{3}+4\right)\times\left(3+2\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=\left(4\sqrt{3}+7\right)\times\left(3+2\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=12\sqrt{3}+24+21+14\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]}=45+26\sqrt{3}$

$V_{[ABCDEFGH]}=\left(45+26\sqrt{3}\right)$ u.v.

3.

3.1 A circunferência $\mathcal{C}$ tem centro no ponto de coordenadas $(4,-2)$, pelo que a sua equação reduzida será do tipo $(x-4)^2+(y-(-2))^2=r^2$.

Como a reta r contém o ponto A, que pertence semieixo positivo Ox:

$A(x,0)$: $0=-\dfrac{x}{3}+1 \Leftrightarrow x=3$

Logo, $A(3,0)$.

$r=\overline{AB}=\sqrt{(4-3)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}$

Assim, $(x-4)^2+(y-(-2))^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y+2)^2=5$

3.2 Interseção da circunferência com a reta r:

$(x-4)^2+(y+2)^2=5 \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+\left(-\frac{x}{3}+1+2\right)^2=5 \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

Assim: $(x-4)^2+\left(-\frac{x}{3}+3\right)^2=5 \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+\frac{x^2}{9}-2x+9=5 \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

$\Leftrightarrow 10x^2-90x+180=0 \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

$\Leftrightarrow x^2-9x+18=0 \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

$\Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4\times1\times18}}{2} \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

$\Leftrightarrow x=\frac{9\pm3}{2} \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

$\Leftrightarrow (x=3 \vee x=6) \wedge y=-\frac{x}{3}+1$

$A(3,0)$

$B\left(6,-\dfrac{6}{3}+1\right)=B(6,-1)$

3.3 $m_r=-\frac{1}{3}$

$\vec{r}(3,-1)$ (por exemplo)

$(x,y)=(4,-2)+k(3,-1),\ k\in\mathbb{R}$

4. Opção (A)

$A(0,2)$; $C(6,4)$; $D(0,8)$.

$m_{CD}=\frac{8-4}{0-6}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}$

$CD: y=-\frac{2}{3}x+8$

Assim, uma condição que define o conjunto de pontos da região a sombreado incluindo as fronteiras é $x\geq 0 \ \wedge\ y\geq\frac{4}{3}x-4 \wedge\ y\geq 2 \wedge y\leq -\frac{2}{3}x+8$.

5.

5.1 Seja $P(x,y)$ um qualquer ponto da mediatriz de $[AB]$:

$$d(A,P) = d(B,P)$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-(-3))^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-(-1))^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2 = (x-4)^2+(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9 = x^2-8x+16+y^2+2y+1$$

$$\Leftrightarrow 6y-2y = -8x+2x-10+17$$

$$\Leftrightarrow 4y = -6x+7$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$$

5.2 Opção (D)

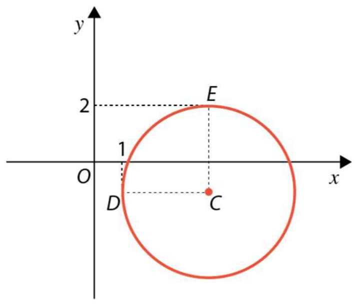
Como B é ponto médio de um segmento de reta $[AC]$, considerando (x,y) como coordenadas do ponto C, então:

$$\frac{1+x}{2} = 4 \wedge \frac{-3+y}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \wedge y = 1$$

5.3 Uma vez que a circunferência tem centro no ponto de coordenadas $(4,-1)$ e tem raio 3, a equação reduzida da mesma será $(x-4)^2+(y+1)^2 = 9$.

Sendo D e E os pontos da circunferência com menor abcissa e maior ordenada, podemos concluir que $D(x,-1)$ e $E(4,y)$. Como a circunferência tem centro de coordenadas $(4,-1)$ e raio 3, então D tem coordenadas $(4-3,-1) = (1,-1)$ e E tem coordenadas $(4,-1+3) = (4,2)$.



$$\overline{DE} = \sqrt{(4-1)^2+\left(2-(-1)\right)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$A = (\overline{DE})^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2 = 18\,u.a.$$

6. Opção (B)

Uma vez que o ponto P pertencente à bissetriz dos quadrantes pares, a sua abcissa é simétrica da sua ordenada, pelo que:

$$m^2-3m = -(16-5m)$$

$$\Leftrightarrow m^2-3m = -16+5m$$

$$\Leftrightarrow m^2-8m+16 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{8}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = 4$$

7. Opção (C)

(A) $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{GE}$ **(V)**

(B) $F + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CH} = E + \overrightarrow{CH} = B$ **(V)**

(C) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EA}$ **(F)**

(D) $\|\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JH}\| = \|\overrightarrow{CH}\| = 2\|\overrightarrow{AB}\|$ **(V)**

8. $\overrightarrow{BA} = A - B = (2,-1) - (1,-4) = (1,3)$

$C = B + 2\overrightarrow{BA} = (1,-4) + 2(1,3) = (1,-4) + (2,6) = (3,2)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (3,2) - (1,-4) = (2,6)$

Para $\vec{u}$ ser colinear com $\overrightarrow{BC}$, tem de ser da forma $(2k, 6k)$, $k \in \mathbb{R}$, e para ter norma igual a $3\sqrt{2}$, tem-se que $\sqrt{(2k)^2 + (6k)^2} = 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4k^2 + 36k^2} = \sqrt{18}$

$\Leftrightarrow 40k^2 = 18$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{18}{40}$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{9}{20}$

$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{9}{20}} = \pm\frac{3}{\sqrt{20}} = \pm\frac{3}{2\sqrt{5}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Para $\vec{u}$ ter sentido contrário ao de $\overrightarrow{BC}$:

$k = -\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Assim, $\vec{u} = \left(2 \times \left(-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right), 6 \times \left(-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\right) = \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{9\sqrt{5}}{5}\right)$.

9. Seja $a \in \mathbb{R}^+$. De acordo com os dados do enunciado $D(0,a)$; $A(-2a,0)$; $B\left(\frac{a}{3},0\right)$ e $C\left(0,\frac{2a}{3}\right)$.

Assim:

$m = \frac{\frac{2a}{3}-0}{0-(-2a)} = \frac{\frac{2a}{3}}{2a} = \frac{1}{3}$

$n = \frac{0-a}{\frac{a}{3}-0} = \frac{-a}{\frac{a}{3}} = -3$

$m \times n = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$, c.q.p.