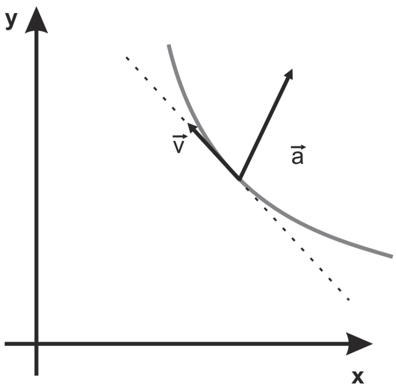
Componentes tangencial e normal do vector aceleração

Albino Rafael

A figura seguinte representa a trajectória de uma partícula.



A velocidade da partícula é um vector tangente à trajectória.

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t$$

Sendo a aceleração da partícula $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$,

vem

$$\vec{a} = \frac{d(v\,\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\,\vec{e}_t}{dt}$$

Como a trajectória é curvilínea, a direcção do versor $\vec{e}_t$ não é constante, assim, $\dfrac{d\,\vec{e}_t}{dt} \neq \vec{o}$. (*Note que* $\vec{e}_x$ *e* $\vec{e}_y$ *são constantes, por isso,* $\dfrac{d\,\vec{e}_x}{dt} = \vec{o}$ e $\dfrac{d\,\vec{e}_y}{dt} = \vec{o}$)

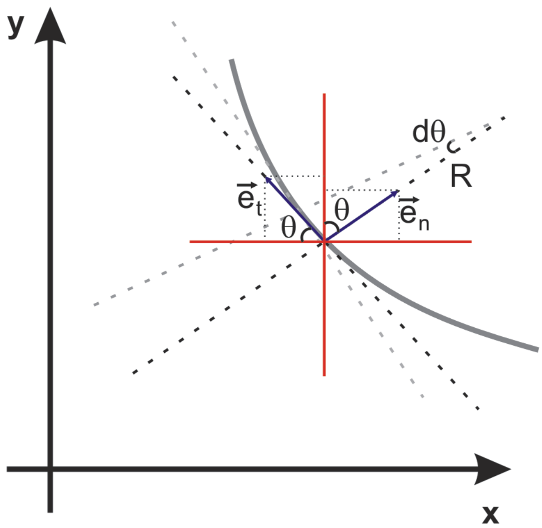
Designemos por θ o ângulo que a tangente à curva, no ponto representado na figura, faz com o eixo dos *xx*.

Vamos decompor $\vec{e}_t$ e $\vec{e}_n$ segundo as direcções dos eixos dos *xx* e dos *yy*.

$$\vec{e}_t = -\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_n = \sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$$

(*Note que* $\|\vec{e}_t\| = 1$ *e* $\|\vec{e}_n\| = 1$)



Assim,

$$\frac{d\,\vec{e}_t}{dt} = \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_x + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_y$$

ou então,

$$\frac{d\,\vec{e}_t}{dt} = (\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)\frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_n\frac{d\theta}{dt}$$

É já sabido que $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega = \dfrac{v}{R}$

(*uma vez que, para pequenas amplitudes,* $ds = R.d\theta$ *e* $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\theta}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{R}v$)

Assim, $\dfrac{d\,\vec{e}_t}{dt} = \vec{e}_n\dfrac{v}{R}$

Substituindo na equação da aceleração, temos

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$