Teste de Matemática A

2017 / 2018

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

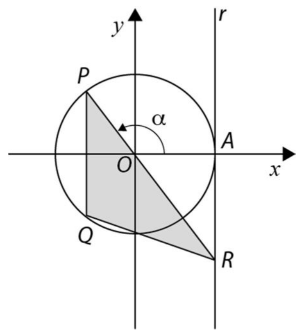
Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e a reta r. Sabe-se que:



- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A;
- o ponto P está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto Q pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[PQ]$ é paralelo ao eixo Oy;
- o ponto R é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{P}O$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

A área do triângulo $[PQR]$ é dada, em função de α, por:

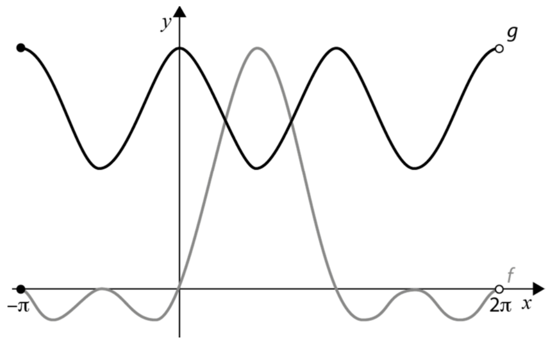
(A) $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(B) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(C) $\operatorname{sen}\alpha \times (1 - \operatorname{tg}\alpha)$

(D) $\operatorname{sen}\alpha \times (1 + \operatorname{tg}\alpha)$

2. No referencial seguinte estão representados os gráficos das funções f e g, definidos no intervalo $[-\pi, 2\pi[$ por $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 1 + \cos^2 x$.



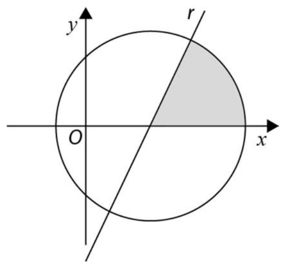
2.1. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$.

Na sua resposta reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s), bem como as suas coordenadas arredondadas às centésimas.

2.2. Os pontos P e Q pertencentes, respetivamente, aos gráficos de f e de g têm a mesma abcissa e distam uma unidade. Determine todos os pares de pontos P e Q destes gráficos que gozam da mesma propriedade.

3. Considere num referencial o.n. Oxy:

- a reta r definida por $y = 2x - 2$;
- a circunferência definida por $(x-1)^2 + y^2 = 2$.



A área do setor circular, representado a sombreado, é, com aproximação às milésimas, igual a:

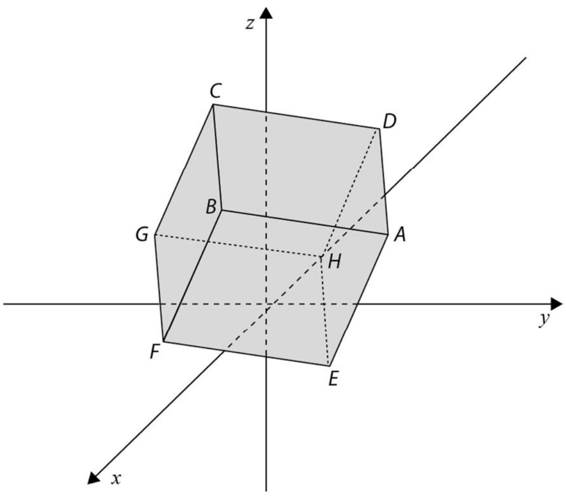
(A) $2{,}214$

(B) $1{,}107$

(C) $0{,}554$

(D) $0{,}272$

4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.



Admita que:

- o plano ABF é definido por $3x + y - \frac{3}{2}z - 12 = 0$;
- o ponto D tem coordenadas $(-2,4,7)$;
- o vetor $\overrightarrow{CG}$ tem coordenadas $(-2a, -3a, -6a)$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

4.1. Determine uma equação cartesiana do plano DCG.

4.2. Determine o volume do cubo $[ABCDEFGH]$.

4.3. O ponto P é a interseção do plano ABC com o eixo Oz e o ponto Q é a interseção do plano ABF com o eixo o Ox. Determine o valor exato de $\overline{PQ}$.

5. Sabendo que α é agudo, $\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$, determine o valor exato de $\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.**	
8	15	20	8	15	20	20	20	**126**

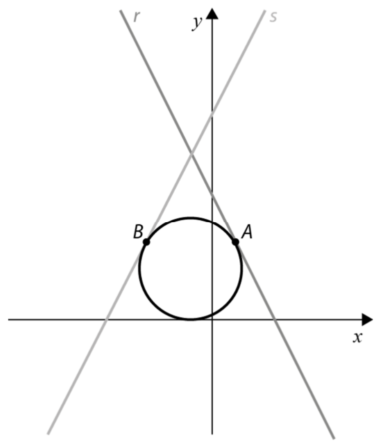
CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Qual é o valor exato de $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$?

(A) $\sqrt{3}+\frac{1}{3}$ **(B)** $\sqrt{3}-\frac{1}{3}$ **(C)** $-\sqrt{3}-\frac{1}{3}$ **(D)** $-\sqrt{3}+\frac{1}{3}$

7. Na figura estão representadas, num plano munido de um referencial ortonormado Oxy, duas retas r e s, tangentes a uma circunferência de centro C nos pontos $A(1,3)$ e $B(-3,3)$, respetivamente. Sabendo que as retas são definidas por
$r: y+2x=5$ e $s: y-2x-9=0$, determine o valor do perímetro da circunferência.



8. Seja (a_n) uma sucessão limitada.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (a_n) é convergente.

(B) (a_n) é monótona.

(C) Existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq L$.

(D) Existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq L$.

9. Seja (b_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = \dfrac{3+b_n}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

9.1. Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 3$.

9.2. Deduza da alínea anterior que (b_n) é crescente.

10. Seja (c_n) a sucessão definida por $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}$.

O valor $\lim\ c_n$ é:

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item						
Cotação (em pontos)						
6.	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	
8	20	8	15	15	8	**74**

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (A)

Sabemos que $P(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$, $\cos\alpha < 0$ e $\text{sen}\alpha > 0$, pois P está no segundo quadrante.

Então, a base do triângulo $[PQR]$ é igual a $2\text{sen}\alpha$ e a altura é igual a $1 + (-\cos\alpha) = 1 - \cos\alpha$.

Logo, a área do triângulo $[PQR]$ é igual a:

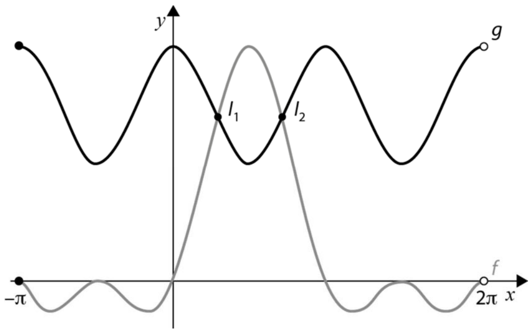
$$\frac{2\text{sen}\alpha \times (1 - \cos\alpha)}{2} = \text{sen}\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha$$

2.

2.1. $y_1 = \text{sen}^2 x + \text{sen}\, x$

$y_2 = 1 + \cos^2 x$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtemos:



$I_1(a, b)$
$a \approx 0{,}90 \quad b \approx 1{,}39$

$I_2(c, d)$
$c \approx 2{,}25 \quad d \approx 1{,}39$

As soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$ são 1 e 2.

2.2. $|\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 - \cos^2 x| = 1 \Leftrightarrow |\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 - 1 + \text{sen}^2 x| = 1$

$\Leftrightarrow |2\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 2| = 1$

$\Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 2 = 1 \ \vee\ 2\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 2 = -1$

$\Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 3 = 0 \ \vee\ 2\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4} \vee \text{sen}\, x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}\, x = -\frac{3}{2}}_{\text{eq. impossível}} \ \vee\ \text{sen}\, x = 1 \ \vee\ \text{sen}\, x = -1 \ \vee\ \text{sen}\, x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $[-\pi, 2\pi[$: $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$

Os pares de pontos P e Q destes gráficos que gozam desta propriedade são:

- $P_1\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $Q_1\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$

- $P_2\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right)$ e $Q_2\left(\frac{\pi}{6}, \frac{7}{4}\right)$
- $P_3\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ e $Q_3\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
- $P_4\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{4}\right)$ e $Q_4\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7}{4}\right)$
- $P_5\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ e $Q_5\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$

3. Opção (B)

$m_r = 2$ (declive da reta r)

$\text{tg}\alpha = 2$, logo $\alpha \approx 1{,}107 \text{ rad}$ (inclinação da reta r)

Logo, a área do setor circular á dada por:

2π______________2π

$1{,}107$____________x

$x \approx 1{,}107$

4.

4.1. O plano DCG é paralelo ao plano ABF (o vetor de coordenadas (6, 2, −3) é perpendicular aos dois planos) e contém o ponto D, logo pode ser definido pela condição:

$6(x+2) + 2(y-4) - 3(z-7) = 0$, isto é:

$6x + 12 + 2y - 8 - 3z + 21 = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - 3z + 25 = 0$

4.2. Comecemos por definir a reta DA, perpendicular ao plano ABF:

$$(x, y, z) = (-2{,}4{,}7) + k(6{,}2{,}-3), k \in \mathbb{R}$$

Então:

$(-2 + 6k, 4 + 2k, 7 - 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta DA.

Determinemos as coordenadas de A, ponto de interseção da reta DA com o plano ABF:

$$\begin{aligned} 6(-2+6k) + 2(4+2k) - 3(7-3k) - 24 = 0 &\Leftrightarrow -12 + 36k + 8 + 4k - 21 + 9k - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow 49k = 49 \\ &\Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

Logo, $A(-2 + 6{,}4 + 2{,}7 - 3)$, isto é, $A(4{,}6{,}4)$.

É possível, então, determinar o valor da aresta do cubo:

$d(A, D) = \sqrt{(4+2)^2 + (6-4)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$

Logo, o volume do cubo é igual a $7^3 = 343$ unidades de volume.

4.3. Determinemos uma condição que defina o plano ABC. Como $\overrightarrow{CG}$ é um vetor perpendicular ao plano ABC e $D(-2{,}4{,}7)$ pertence ao plano, então pode ser definido por:

$$-2(x+2)-3(y-4)-6(z-7)=0$$

ou seja:

$-2x-4-3y+12-6z+42=0 \Leftrightarrow -2x-3y-6z+50=0$

Sabemos que P admite coordenadas $(0{,}0,c)$, $c \in \mathbb{R}$ e pertence ao plano ABC, logo:

$-2\times 0-3\times 0-6c+50=0 \Leftrightarrow c=\frac{50}{6} \Leftrightarrow c=\frac{25}{3}$

$P\left(0{,}0,\frac{25}{3}\right)$

Sabemos, também, que Q admite coordenadas $(a, 0{,}0)$, $a \in \mathbb{R}$ e pertence ao plano ABF, logo:

$3a+0-\frac{3}{2}\times 0-12=0 \Leftrightarrow 3a=12 \Leftrightarrow a=4$

$Q(4{,}0{,}0)$

Assim:

$$\overline{PQ}=\sqrt{4^2+0^2+\left(-\frac{25}{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{16+\frac{625}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{769}{9}}=$$

$$=\frac{\sqrt{769}}{3}$$

5. Por um lado:

$$\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow (\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow -2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=-\frac{8}{9}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3}\\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}+\cos\alpha\\ \left(\frac{1}{3}+\cos\alpha\right)\cos\alpha=\frac{4}{9}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\overline{\frac{1}{3}\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{4}{9}}\right. \Leftrightarrow \left\{\overline{9\cos^2\alpha+3\cos\alpha-4=0}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\overline{\cos\alpha=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\times 9\times(-4)}}{18}}\right. \Leftrightarrow \left\{\overline{\cos\alpha=-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{17}}{6}}\right. \vee \left\{\overline{\cos\alpha=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{17}}{6}}\right.$$

Como α é agudo, $\cos\alpha = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}$ e, então, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}$.

Por outro lado:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha}{(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)^2} =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)}{(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)^2} =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}{(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)^2}$$

Substituindo pelos valores acima, obtemos:

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{17}}{6}-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{17}}{6}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{3}}{\frac{16}{81}} =$$

$$= \frac{\sqrt{17}\times 81}{16\times 9} =$$

$$= \frac{9\sqrt{17}}{16}$$

Outro processo

$\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3} + \cos\alpha$

Sabemos que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Então:

$$\left(\frac{1}{3} + \cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \frac{2}{3}\cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha + \frac{2}{3}\cos\alpha - \frac{8}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 18\cos^2\alpha + 6\cos\alpha - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\times18\times(-8)}}{36}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{17}}{6} \ \vee \ \cos\alpha = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}$$

Como α é agudo, $\cos\alpha = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}$.

$$\cos^2\alpha = \left(-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{36} - \frac{\sqrt{17}}{18} + \frac{17}{36} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{18}$$

Sabemos que $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, logo:

$$\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{17}}{18}} - 1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{18}}{\frac{1}{4}-\frac{17}{324}} - 1 =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{18}}{\frac{16}{81}} - 1 = \frac{81}{16} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{18}\right) - 1 =$$

$$= \frac{81}{32} + \frac{9\sqrt{17}}{32} - \frac{32}{32} = \frac{49+9\sqrt{17}}{32}$$

$$\frac{1}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{32}{49+9\sqrt{17}} = \frac{32(49-9\sqrt{17})}{1024} = \frac{49-9\sqrt{17}}{32}$$

$$\text{tg}^2\alpha - \frac{1}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{49+9\sqrt{17}}{32} - \frac{49-9\sqrt{17}}{32} = \frac{18\sqrt{17}}{32} = \frac{9\sqrt{17}}{16}$$

Caderno 2

6. Opção (D)

$$\text{tg}\left(\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \text{sen}\left(\text{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} + \frac{1}{3}$$

7. $r: y + 2x = 5$

$y + 2x = 5 \Leftrightarrow y = -2x + 5$, logo o declive da reta r é igual a -2 ($m_r = -2$) e $\vec{r}(1,-2)$ é um seu vetor diretor.

$s: y - 2x - 9 = 0$

$y - 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 9$, logo o declive da reta s é igual a 2 ($m_s = -2$) e $\vec{s}(1,2)$ é um seu vetor diretor.

Seja $C(a,b)$ o centro da circunferência. Sabemos que $\overrightarrow{AC}.\vec{r} = 0$ e $\overrightarrow{BC}.\vec{s} = 0$. Então:

$$\begin{cases}(a-1, b-3).(1,-2) = 0 \\ (a+3, b-3).(1,2) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a - 1 - 2b + 6 = 0 \\ a + 3 + 2b - 6 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = 2b - 5 \\ 2b - 5 + 2b = 3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = 2b - 5 \\ 4b = 8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = -1 \\ b = 2\end{cases}$$

Assim, $C(-1,2)$.

Seja r o raio da circunferência.

$$r = d(A,C) = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Logo, o valor do perímetro da circunferência é igual a $2\pi \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\pi$.

8. Opção (C)

(a_n) é uma sucessão limitada, isto é, existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq L$.

9.

9.1. $P(n): b_n < 3$

(i) $P(1)$ é verdadeira

$b_1 < 3 \Leftrightarrow 2 < 3$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): b_n < 3$ (hipótese de indução)

$P(n+1): b_{n+1} < 3$ (tese de indução)

$$b_n < 3 \Leftrightarrow b_n + 3 < 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{3+b_n}{2} < 3$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1} < 3$$

Por (i) e (ii), pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 3$ é uma proposição verdadeira.

9.2. $b_{n+1} - b_n = \frac{3+b_n}{2} - b_n = \frac{3+b_n-2b_n}{2} = \frac{3-b_n}{2}$

Pela alínea anterior, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 3$, logo:

$$\forall n \in \mathbb{N}, -b_n > -3 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 3-b_n > 0$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{3-b_n}{2} > 0$$

Logo, (b_n) é crescente.

10. Opção (B)

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} = 0 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} =$$
$$= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} =$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(\underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{\substack{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos} \\ \text{de uma progressão aritmética}}}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2} \times \left(\frac{1+n}{2} \times n\right) =$$
$$= \frac{n^2+n}{2n^2} =$$
$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim c_n = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$