Avaliação – Teste sumativo 2.º Período

Matemática A | 10.º Ano

Nome: ____________________ Turma: ____ Data: ____/____/____

Classificação: ____________________ Professor: __________ Enc. Educação: __________

Sugestão de cotações

1.1	1.2	1.3	1.4	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	7.	8.1	8.2	8.3	Total
8	12	12	8	8	12	13	12	13	8	12	13	12	12	8	13	12	12	**200**

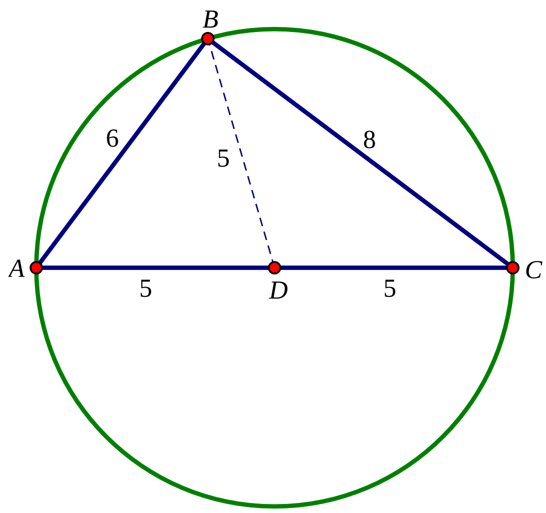
Propostas de resolução

1.1 Como o triângulo é retângulo em B, o ortocentro é o ponto B e o ponto médio do lado $[AC]$ é o circuncentro do triângulo $[ABC]$. O incentro e o baricentro estão sempre no interior do triângulo.

Resposta: B

1.2 Como o triângulo é retângulo em B, o ortocentro é o ponto B e o circuncentro é o ponto médio do lado $[AC]$. Assim, como a reta de Euler contém o ortocentro e o circuncentro de um triângulo, conclui-se que a reta de Euler do triângulo $[ABC]$ contém o ponto B e o ponto médio do lado $[AC]$.

1.3 Como o triângulo é retângulo em B, $[AC]$ é um diâmetro da circunferência circunscrita no triângulo $[ABC]$, pelo que $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$, sendo D o ponto médio $[AC]$ (que corresponde ao circuncentro do triângulo $[ABC]$).



Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{36+64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{100} \Leftrightarrow \overline{AC} = 10$$

Portanto, $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = 5$, isto é, a medida do raio da circunferência circunscrita é 5 e a área do círculo limitado por esta circunferência é $\pi \times 5^2 = 25\pi$.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

1.4 Como o raio da circunferência dos nove pontos de um triângulo é metade do raio da circunferência circunscrita desse triângulo, a medida do raio da circunferência dos nove pontos do triângulo $[ABC]$ é $\frac{5}{2}$, pelo que o seu comprimento é $2\pi \times \frac{5}{2} = 5\pi$.

Resposta: C

2. Como o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima, conclui-se que $a > 0$.

Para determinar a abcissa do vértice, pode-se determinar as soluções da equação $g(x) = 2$. A abcissa será o valor médio das duas soluções.

Assim, $g(x) = 2 \Leftrightarrow g(x) = ax^2 + (2-a)x + \cancel{2} = \cancel{2} \Leftrightarrow x(ax + 2 - a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ ax + 2 - a = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ ax = a - 2 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \frac{a-2}{a}$$

Então, a abcissa do vértice do gráfico de g (que é uma parábola com a concavidade voltada para cima) é dada por $\frac{0 + \frac{a-2}{a}}{2} = \frac{\frac{a-2}{a}}{2} = \frac{a-2}{2a}$. Logo, $\frac{a-2}{2a} < -1 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a - 2 < -2a \Leftrightarrow 3a < 2 \Leftrightarrow a < \frac{2}{3}$.

Portanto, como $a > 0$ e $a < \frac{2}{3}$, vem que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

Resposta: A

3.1 A função f é decrescente em $]-\infty, -2[$ e em $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$, é crescente em $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ e é constante em $[-2, 0[$. A função f tem máximo relativo igual a 0 em $x \in [-2, 0[$ e igual a $\frac{9}{8}$ em $x = \frac{5}{2}$. Tem mínimo relativo igual a -2 em $x = 0$ e igual a 0 em $x \in]-2, 0[$.

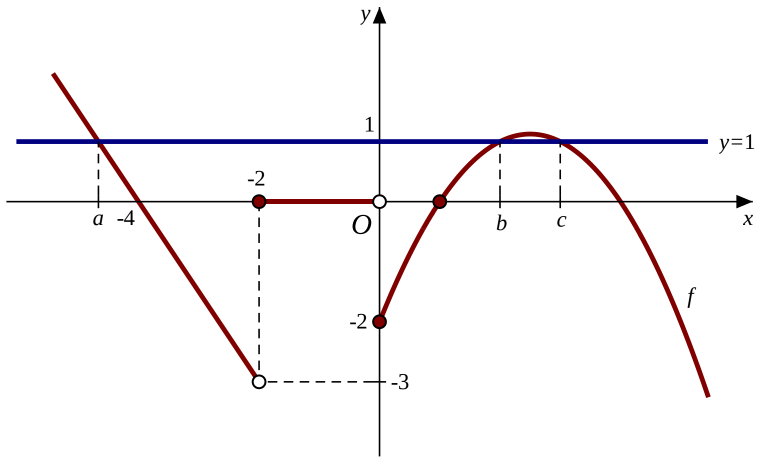
3.2 Para $x \geq 0$, o gráfico da função f é parte de uma parábola com vértice no ponto de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{8}\right)$, pelo que $f(x) = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$, com $a < 0$.

Como o ponto de coordenadas $(0, -2)$ pertence à parábola, tem-se:

$$f(0) = -2 \Leftrightarrow a\left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{8} = -2 \Leftrightarrow \frac{25a}{4} = -2 - \frac{9}{8} \Leftrightarrow \frac{\cancel{25}a}{4} = -\frac{\cancel{25}}{8} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{8} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Logo, $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{8} = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{9}{8} = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - \frac{25}{8} + \frac{9}{8} = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - 2$.

3.3 Consideremos a seguinte figura, em que está representada também a reta de equação $y=1$.



Assim, $f(x)\geq 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, a\right] \cup [b,c]$. Resta-nos determinar os valores de a, b e c, que são as abissas dos pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y=1$.

- Para $x \geq 0$, tem-se que $f(x)=1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}x-2=1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}x-3=0 \Leftrightarrow -x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times(-1)\times(-6)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm 1}{-2} \Leftrightarrow x=2 \ \vee \ x=3$$

Logo, $b=2$ e $c=3$.

- Para $x \leq -2$, o gráfico de f é uma semirreta. Como os pontos de coordenadas $(-4,0)$ e $(-2,-3)$ pertencem à reta que contém o gráfico de f, para $x \leq -2$, o seu declive é dado por:

$$\frac{-3-0}{-2-(-4)}=\frac{-3}{-2+4}=-\frac{3}{2}$$

Logo, a equação reduzida da reta que contém o gráfico de f, para $x \leq -2$, é da forma $y=-\frac{3}{2}x+b$. Como o ponto de coordenadas $(-4,0)$ pertence à reta, então $0=-\frac{3}{2}\times(-4)+b \Leftrightarrow b=-6$.

Logo, para $x \leq -2$, $f(x)=-\frac{3}{2}x-6$, e, portanto:

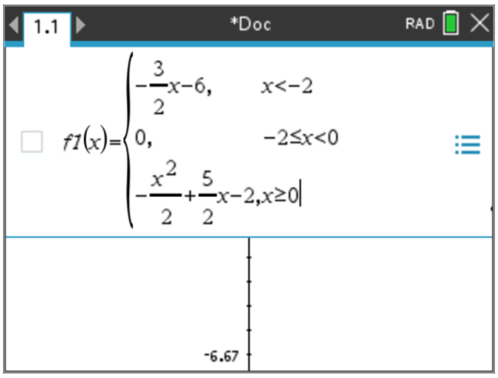
$$f(x)=1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x-6=1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x=7 \Leftrightarrow -3x=14 \Leftrightarrow x=-\frac{14}{3}$$

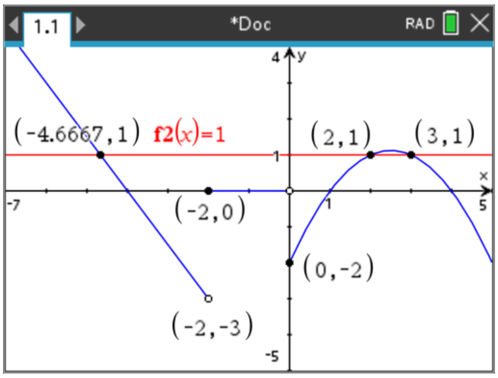
Assim, $a=-\frac{14}{3}$ e o conjunto-solução da condição $f(x)\geq 1$ é $\left]-\infty,-\frac{14}{3}\right] \cup [2,3]$.

Usando uma calculadora gráfica (no anexo de calculadoras do volume 2 do *Matemática 360*, podes consultar os procedimentos para introduzir funções definidas por ramos em cada um dos seguintes modelos de calculadora):

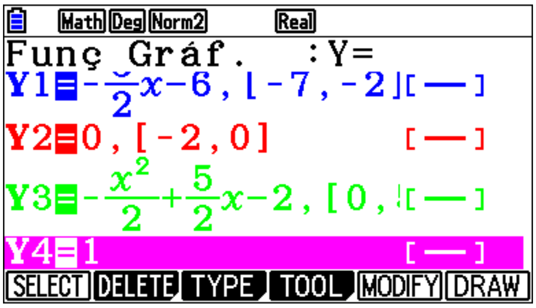
Vamos usar o trabalho analítico que foi feito para determinar a expressão analítica de f para $x \le -2$.

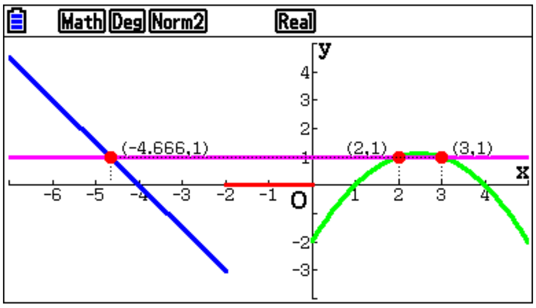
TEXAS TI nspire CX e CX II-T





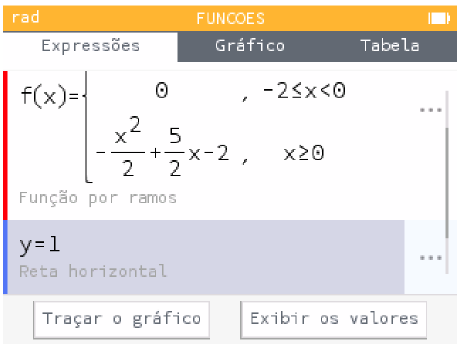
CASIO FX-CG50

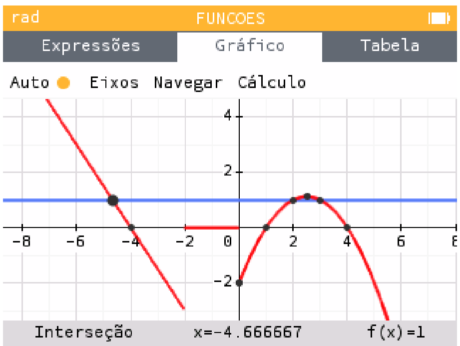


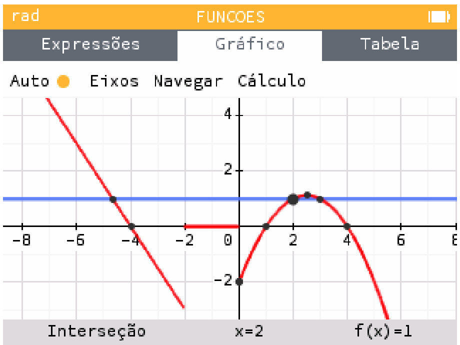


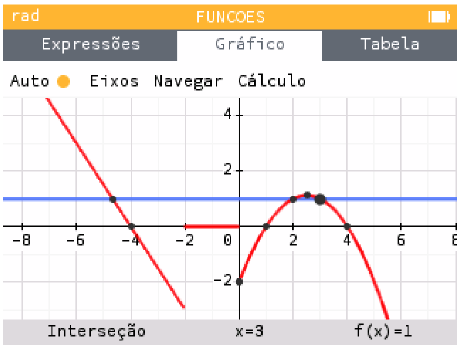
Nota: Foram usados os intervalos $[-7,-2]$ e $[0,5]$ para o primeiro e terceiro ramos, porque o gráfico da função foi representado no intervalo $[-7,5]$.

NUMWORKS









Logo, o conjunto-solução da condição $f(x) \geq 1$ é $\left]-\infty, -\frac{14}{3}\right] \cup [2,3]$ ($-4,(6) = -\frac{14}{3}$)

4. Tem-se $f(x) = \left(4k^2 + 4k + 1\right)x + 1$, com $k \in \mathbb{R}$.

f é uma função afim e, portanto, é crescente se o coeficiente de x for positivo. Por outras palavras, se o declive da reta que é o seu gráfico for positivo.

O coeficiente de x é $4k^2 + 4k + 1$ e $4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$, que é sempre positivo, exceto no caso em que $2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$ (neste caso, f seria constante).

Portanto, a função f é crescente para todo o $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

5.1 O domínio de g é $]-3,0[\cup [0,1[\cup]1,4] =]-3,1[\cup]1,4] =]-3,4] \setminus \{1\}$.

Resposta: D

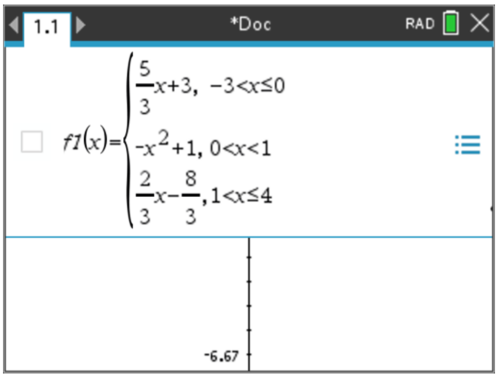
5.2 Tem-se que:

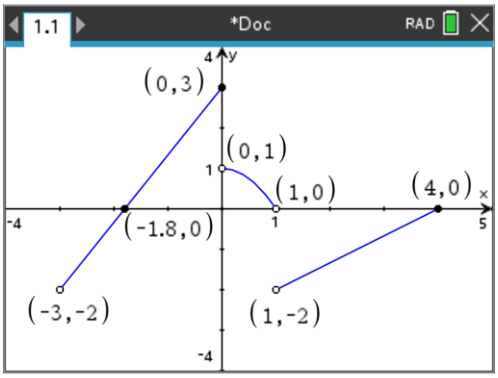
- para $-3 < x < 0$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x + 3 = 0 \Leftrightarrow 5x + 9 = 0 \Leftrightarrow 5x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}$ e $-\frac{9}{5} \in]-3,0[$;
- para $0 \leq x < 1$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$, $-1 \notin [0,1[$ e $1 \notin [0,1[$;
- para $1 < x \leq 4$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ e $4 \in]1,4]$.

Logo, os zeros de g são $-\frac{9}{5}$ e 4.

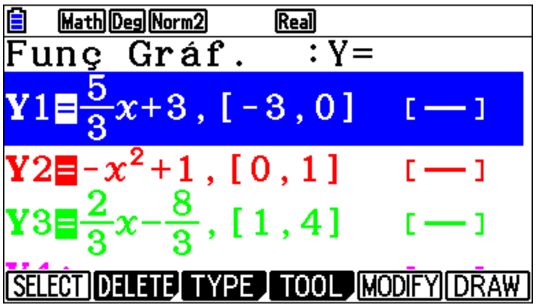
Usando uma calculadora gráfica:

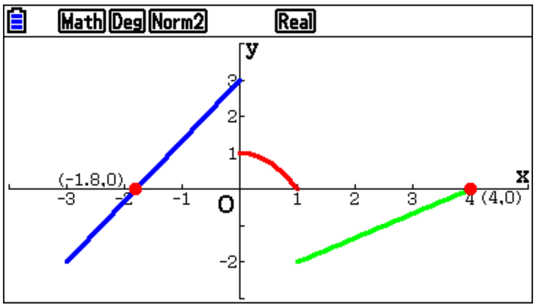
TEXAS TI nspire CX e CX II-T





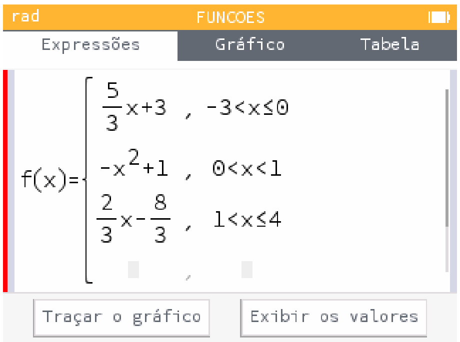
CASIO FX-CG50

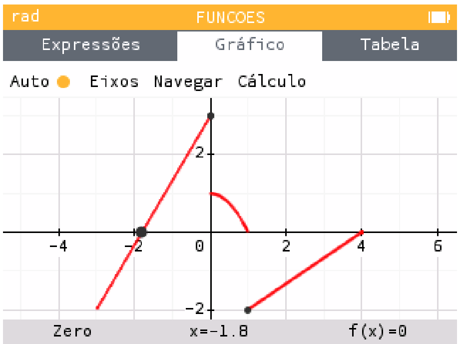


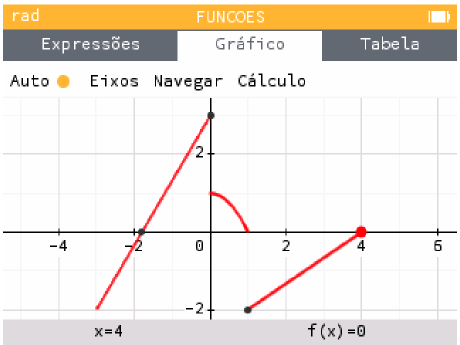


Nota: Apesar de parecer que g tem um zero em $x=1$, devido à representação gráfica de g nesta calculadora, tem em atenção que 1 não pertence ao domínio de g .

NUMWORKS







Logo, os zeros de g são $-1{,}8=-\frac{9}{5}$ e 4.

6.1 A área do lago é dada por $\frac{\overline{FH}\times\overline{EG}}{2}$.

Tem-se que $\overline{FH}=8-2x$ e como a diagonal $[EG]$ excede em três metros do dobro do comprimento de $[PF]$, tem-se que $\overline{EG}=2\overline{PF}+3=2x+3$.

Assim, $A(x)=\frac{\overline{FH}\times\overline{EG}}{2}=\frac{(8-2x)\times(2x+3)}{2}=\frac{\cancel{2}(4-x)\times(2x+3)}{\cancel{2}}=8x+12-2x^2-3x=-2x^2+5x+12$.

Os valores possíveis para x são tais que $x>0\wedge 2x<8$, ou seja, $x>0\wedge x<4$; logo, tem-se $x\in\left]0,4\right[$.

Conclui-se, portanto, que $A(x)=-2x^2+5x+12$, $x\in\left]0,4\right[$.

6.2 O gráfico da função que dá a área do lago é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, dado que o coeficiente do termo em x^2 é negativo. Logo, se a abcissa do vértice pertencer ao domínio da função, a sua ordenada corresponde ao valor máximo da função e a sua abcissa ao maximizante.

Para determinar a abcissa do vértice, pode-se determinar as soluções da equação $A(x)=12$. A abcissa será o valor médio das duas soluções.

Assim, $A(x)=12\Leftrightarrow -2x^2+5x+\cancel{12}=\cancel{12}\Leftrightarrow x(-2x+5)=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ -2x+5=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\frac{5}{2}$.

Logo, a abcissa do vértice é $\frac{0+\frac{5}{2}}{2}=\frac{5}{4}=1,25$, que pertence ao domínio da função, pelo que a ordenada é:

$$A(1,25)=-2\times(1,25)^2+5\times1,25+12=-2\times1,5625+6,25+12=-3,125+6,25+12=15,125$$

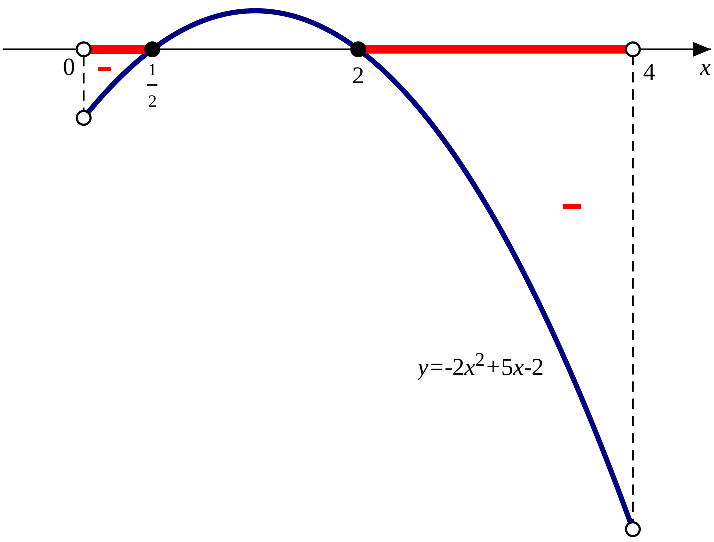
Portanto, a área do lago é máxima para $x=1,25$ m, e o valor máximo dessa área é $15,125$ m².

Finalmente, o lago tem a forma de um quadrado se as diagonais forem iguais. Neste caso, para $x=1,25$ m, tem-se $\overline{FH}=8-2\times1,25=5,5$ m e $\overline{EG}=2\times1,25+3=5,5$ m, pelo que o lago tem a forma de um quadrado.

6.3 $A(x)\le 14 \Leftrightarrow -2x^2+5x+12\le 14 \Leftrightarrow -2x^2+5x-2\le 0$.

Tem-se $-2x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times(-2)\times(-2)}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{-4} \Leftrightarrow x=2 \ \vee \ x=\frac{1}{2}$

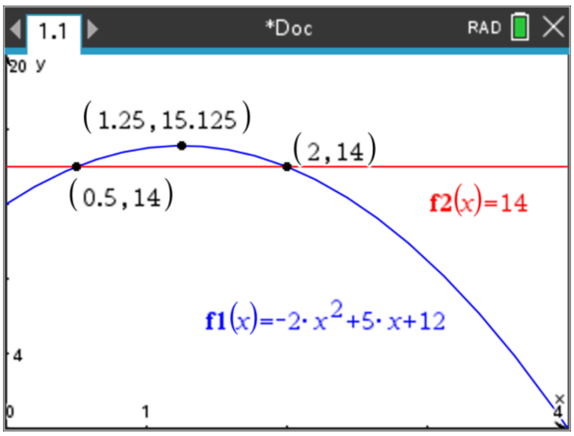
O gráfico da função definida por $y=-2x^2+5x-2$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo:



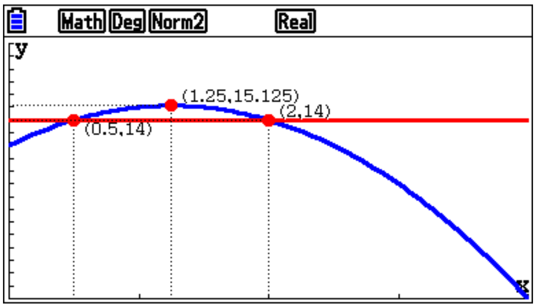
Assim, como o domínio é $]0,4[$, a área do lago não é superior a 14 m² se $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,4[$.

Usando uma calculadora gráfica:

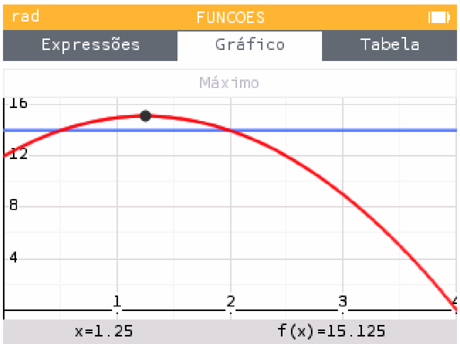
TEXAS TI nspire CX e CX II-T

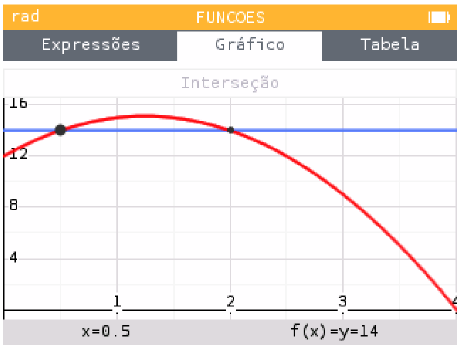


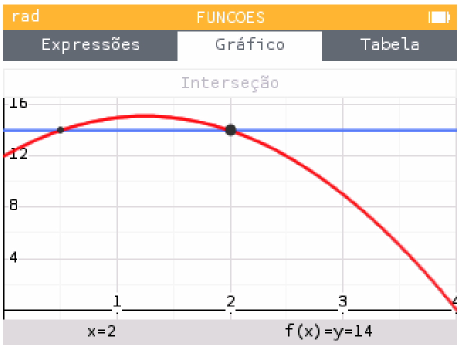
CASIO FX-CG50



NUMWORKS





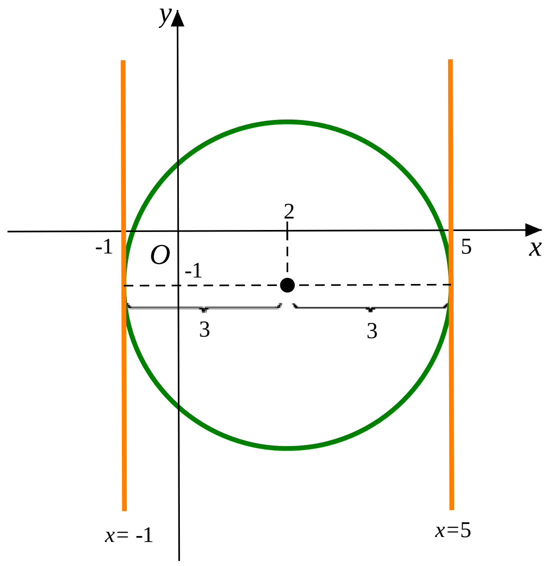


Respondendo agora a 6.2 e 6.3:

6.2 Portanto, a área do lago é máxima para $x = 1,25$ m, e o valor máximo dessa área é 15,125 m². Finalmente, o lago tem a forma de um quadrado se as diagonais forem iguais. Neste caso, para $x = 1,25$ m, tem-se $\overline{FH} = 8 - 2 \times 1,25 = 5,5$ m e $\overline{EG} = 2 \times 1,25 + 3 = 5,5$ m, pelo que o lago tem a forma de um quadrado.

6.3 Assim, como o domínio é $]0,4[$, a área do lago não é superior a 14 m² se $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \cup [2,4[$.

7. A circunferência definida por $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ está centrada no ponto de coordenadas $(2,-1)$ e raio 3. Representando-a em referencial o.n. Oxy, assim como as retas que lhe são tangentes e perpendiculares ao eixo Ox, tem-se:



Logo, como a circunferência está centrada no ponto de coordenadas $(2,-1)$ e o raio é 3, as retas que lhe são tangentes e perpendiculares ao eixo Ox são as retas de equações $x=2+3 \Leftrightarrow x=5$ e $x=2-3 \Leftrightarrow x=-1$.

Resposta: D

8.1 Como o ponto A pertence à reta r, que é definida por $y=x$, por conter as bissetrizes dos quadrantes ímpares, as suas coordenadas são da forma $A(x_A, x_A)$, com $x_A>0$, dado que A pertence ao primeiro quadrante.

Assim, $\overline{AO}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_A-0)^2+(x_A-0)^2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2(x_A)^2=2^2\left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{2}(x_A)^2=4\times\cancel{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_A=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x_A=-2 \ \vee \ x_A=2$$

Como $x_A>0$, tem-se $x_A=2$, pelo que $A(2,2)$. Logo, uma equação da circunferência centrada em A e de raio $\overline{AO}$ é $(x-2)^2+(y-2)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=8$.

8.2 Uma equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta $[AB]$ é dada por:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$$

Assim, a mediatriz do segmento de reta $[AB]$, com $A(2,2)$ e $B(-2,-1)$ é dada por:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-4x+\cancel{4}+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}+4x+\cancel{4}+\cancel{y^2}+2y+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4y-2y=4x+4x+1-4 \Leftrightarrow -6y=8x-3$$

$$\underset{\div(-6)}{\Leftrightarrow} y=-\frac{8x}{6}-\frac{3}{-6} \Leftrightarrow y=-\frac{4x}{3}+\frac{1}{2}$$

$\therefore$ A equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $y=-\frac{4x}{3}+\frac{1}{2}$.

8.3 Sabemos que:

- uma equação da circunferência centrada em A é $(x-2)^2+(y-2)^2=8$;
- uma equação da circunferência centrada em B é $(x+2)^2+(y+1)^2=10$;
- uma equação da reta r é $y=x$.

A região sombreada da figura inclui todos os pontos que são interiores ou estão na fronteira da circunferência centrada em B, que são exteriores ou estão na fronteira da circunferência centrada em A e que têm a ordenada superior ou igual à abcissa. Assim, uma condição da região sombreada da figura, incluindo a fronteira, é $(x+2)^2+(y+1)^2 \leq 10 \ \wedge \ (x-2)^2+(y-2)^2 \geq 8 \ \wedge \ y \geq x$.

FIM