

Modelos matemáticos nas eleições, na partilha e nas finanças

1. Os alunos finalistas do Ensino Secundário de uma escola estão a decidir qual o local onde irão fazer a sua viagem de finalistas. Depois de alguma discussão, chegaram a três possíveis cidades, Barcelona (B), Praga (P) e Londres (L), e uma destas vai ser escolhida por votação.

1.1 Supõe que votaram 150 alunos e que não houve votos inválidos.

Se o sistema de votação fosse o de maioria simples, qual seria o número mínimo de votos necessário para que uma das cidades fosse escolhida?

A 50

B 75

C 51

D 76

1.2 Considera, agora, que foi pedido aos alunos que listassem, por ordem de preferência, as três cidades. Obtiveram-se os seguintes resultados.

1.ª preferência	L	L	P	B
2.ª preferência	B	P	L	P
3.ª preferência	P	B	B	L
N.º de votos	50	51	x	y

A cidade vencedora vai ser apurada por aplicação do método preferencial em que para a 1.ª preferência serão atribuídos 4 pontos, e para as seguintes preferências 2 e 1, respetivamente.

Sabe-se que o número de votos validamente expressos foi 199 e que a cidade de Praga obteve 368 pontos.

1.2.1 Considerando apenas a primeira preferência, se o método escolhido fosse o de maioria absoluta, alguma das cidades ganharia na primeira volta?

1.2.2 A escola tem 253 alunos finalistas e todos podem votar. Sabendo que houve quatro votos nulos e sete em branco, qual foi a taxa de abstenção, em percentagem, arredondada às unidades?

A 17%

B 19%

C 21%

D 23%

1.2.3 Mostra que $x = 10$ e que $y = 88$.

1.2.4 Qual foi a cidade escolhida?

2. Na tabela seguinte, apresentam-se os cálculos necessários para determinar a distribuição dos 9 mandatos do círculo eleitoral de Santarém nas Eleições Legislativas de 2024. Na tabela, assinalaram-se os 9 maiores quocientes, correspondentes aos mandatos atribuídos. Apenas estão considerados os cinco partidos/coligações mais votados.

Divisores	Partidos/Coligações				
	PS	PPD/PSD. CDS-PP.PPM	CH	BE	PCP-PEV
1	69 915	68 493	58 554	11 204	10 343
2	34 957,5	34 246,5	29 277	5 602	5 171,5
3	23 305	22 831	19 518	3 734,67	3 447,67
4	17 478,75	17 123,25	14 638,5	2 801	2 585,75
5	13 983	13 698,6	11 710,8	2 240,8	2 068,6
...

2.1 Indica a ordem de atribuição dos mandatos deste círculo eleitoral, nestas eleições, pelos partidos/coligações.

2.2 Se o BE e o PCP-PEV tivessem concorrido coligados e a votação obtida por essa coligação fosse a soma das votações obtidas por cada uma destas forças políticas, a distribuição dos mandatos manter-se-ia a mesma? Justifica a tua resposta.

2.3 Um comentador político afirmou:

«Se a votação do CH tivesse sido o triplo da votação do BE, o último mandato obtido pelo CH, teria passado para o BE.»

O comentador político tem razão? Justifica a tua resposta.

2.4 Se o método aplicado para a distribuição dos mandatos fosse o de Saint Laguë, a distribuição dos deputados pelos partidos/coligações seria diferente? Justifica.

2.5 Mantendo-se as votações nos restantes partidos/coligações, qual deveria ter sido o número mínimo de votos no PS para ter conseguido quatro mandatos?

A 73 702

C 78 072

B 73 703

D 78 073

2.6 O BE não conseguiu eleger qualquer representante. Quantos votos teria o BE de ganhar, no mínimo, ao partido que ganhou o último representante para eleger pelo menos um deputado, admitindo que a votação nos restantes partidos manter-se-ia inalterada?

3. O Francisco desconta todos os meses 11% do seu salário para a Segurança Social, sendo esse valor igual a 232,65€.

3.1 Mostra que o salário bruto do Francisco é 2 115€.

3.2 O artigo 271.º do Código do Trabalho estipula que o valor bruto da hora de trabalho é dado pela fórmula $Valor\ hora = \frac{12R_m}{52n}$, em que R_m é o valor da remuneração mensal bruta e n é o número de horas de trabalho semanal.

Sabendo que o valor bruto da hora de trabalho do Francisco é 13,95€, quantas horas trabalha semanalmente?

3.3 O Francisco é casado e tem três filhos. A tabela seguinte permite calcular o valor da retenção na fonte de IRS para o caso do Francisco para os meses de novembro e dezembro de 2025.

Remuneração mensal (€)	Taxa marginal máxima	Parcela a abater (€)	Parcela adicional a abater por dependente (€)	Taxa efetiva mensal de retenção no limite do escalão
Até 1 668,00	0,00%	0,00	0,00	0,0%
Até 2 043,00	20,74%	345,95	21,43	3,8%
Até 2 465,00	24,40%	420,73	21,43	7,3%
Até 3 067,00	31,40%	593,28	21,43	12,1%
Até 4 438,00	34,90%	700,63	21,43	19,1%
Até 6 754,00	38,36%	854,19	21,43	25,7%
Até 7 048,00	39,69%	944,02	21,43	26,3%
Até 20 468,00	44,95%	1 314,75	21,43	38,5%
Superior a 20 468,00	47,17%	1769,14	21,43	n. a.

Fonte: Portal das Finanças.

Fórmula de cálculo da retenção na fonte:

$$(remuneração\ mensal \times taxa) - parcela\ a\ abater - (número\ de\ dependentes) \times (parcela\ adicional\ a\ abater)$$

Considera-se apenas a parte inteira do valor obtido. Se o valor obtido for negativo, o valor da retenção é 0€. R , na tabela, corresponde à remuneração mensal.

Sabendo que o Francisco não tem qualquer subsídio, qual é o valor da remuneração líquida que irá ganhar em novembro?

4. A Manuela é trabalhadora independente.

No ano de 2024, a Manuela fez três pagamentos por conta de IRS (equivalente à retenção na fonte), cada um no valor de 1 138€. Sabe-se ainda que, durante esse ano, a Manuela acumulou 1 425,32€ de deduções (onde se incluem despesas com saúde, veterinários, despesas em oficinas, cabeleireiro, etc.). Nesse ano, o seu rendimento bruto foi de 27 820€, sendo 75% desse valor o seu rendimento coletável.

Depois de apurado o valor do IRS de 2024, a Manuela terá ainda de pagar algum valor de acerto ou terá direito ao reembolso de parte do valor já pago?

Para responderes à questão utiliza a tabela seguinte, referente ao IRS de 2024, pago em 2025.

Escalão	Rendimento coletável	Taxa marginal	Taxa média	Parcela a abater
1.º	Até 7 479€	14,5%	14,5%	0,00€
2.º	Mais de 7 479€ até 11 284€	21%	16,69%	486,14€
3.º	Mais de 11 284€ até 15 992€	26,5%	19,58%	1 106,73€
4.º	Mais de 15 992€ até 20 700€	28,5%	21,61%	1 426,65€
5.º	Mais de 20 700€ até 26 355€	35%	24,48%	2 772,14€
6.º	Mais de 26 355€ até 38 632€	37%	28,46%	3 299,12€
7.º	Mais de 38 632€ até 50 483€	43,5%	31,99%	5 810,25€
8.º	Mais de 50 483€ até 78 834€	45%	36,67%	6 567,33€
9.º	Mais de 78 834€	48%		8 932,68€

Fonte: Montepio, Associação Mutualista. Outubro de 2025

O valor do IRS anual pode ser calculado por pelo menos dois processos:

$\text{rendimento coletável} \times \text{taxa do escalão} - \text{parcela a abater do escalão}$

ou

$(\text{limite superior do escalão anterior}) \times \text{taxa média} + (\text{rendimento coletável} - \text{limite inferior do escalão}) \times \text{taxa do escalão}$

5. O João vai investir 2 000€ num depósito a prazo com três anos de duração.

5.1 Se o depósito tiver juros simples e se no final do prazo receber 90€ em juros, qual é o valor da taxa anual líquida, em percentagem?

5.2 Se o depósito tiver juros compostos, com uma taxa anual líquida de 1,8% e com capitalizações trimestrais, qual é o capital líquido acumulado no final do prazo?

5.3 O banco ofereceu ao João um depósito a prazo, em que, no primeiro ano e meio, a taxa anual líquida é de 1,35%, com capitalizações anuais, e no resto do tempo, a taxa anual líquida é de 1,55%, com capitalizações semestrais. Se o João aceitar esta proposta, qual é o valor do juro que irá receber?

6. A Laura é trabalhadora dependente numa empresa.

6.1 Considera que o ordenado bruto mensal da Laura durante o ano de 2024 foi de 1523,35€ . Além do salário que recebe durante os doze meses do ano, recebe ainda os subsídios de férias e de Natal (de valores iguais ao salário), não auferindo qualquer outro rendimento. Tendo em conta o valor da dedução específica, 4350,24€, qual é o valor do rendimento coletável para apuramento do IRS de 2024?

A 13 929,96€

B 16 976,66€

C 18 033,96€

D 21 080,66€

6.2 A Laura tem 8500,00€ em poupanças, que pretende depositar numa conta no seu banco.

6.2.1 Uma das propostas do banco é uma conta que oferece uma taxa anual líquida de 2,75%, na modalidade de juros simples.

Se optar por esta proposta, qual é o número mínimo de anos que terá de passar até ter um rendimento de, pelo menos, 1000€ ?

A 3 anos.

C 5 anos.

B 4 anos.

D 6 anos.

6.2.2 O banco tem ainda mais três propostas, todas com um prazo de quatro anos.

Proposta A: Taxa anual líquida de 2,5%, na modalidade de juros compostos, com capitalizações anuais;

Proposta B: Taxa anual líquida de 2,48%, na modalidade de juros compostos, com capitalizações mensais;

Proposta C: Nos primeiros dois anos, com uma taxa anual líquida de 1,1%, na modalidade de juros compostos, com capitalizações trimestrais, e, nos últimos dois anos, com uma taxa anual líquida de 4% na modalidade de juros simples.

Qual das três propostas é a mais vantajosa?

Estatística

7. No seguinte diagrama de caule-e-folhas, estão os pesos*, em quilogramas, dos 26 jogadores da seleção nacional de futebol que representaram o país no Euro 2024, que se realizou na Alemanha.



*em linguagem corrente, a palavra «peso» é usada como sinónimo de «massa».

7.1 Qual é a percentagem, arredondada às décimas, de jogadores com mais de 78 kg ?

- A** 38,5%
- B** 46,2%
- C** 53,8%
- D** 61,5%

7.2 Um dos jogadores chegou mais tarde ao estágio da seleção para o Euro 2024. Depois de pesados todos os restantes 25 jogadores, o seu peso médio era de 74,6 kg .

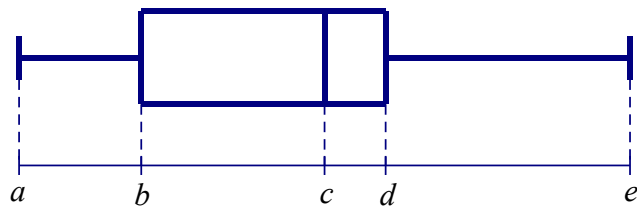
Qual era o peso do jogador que chegou mais tarde ao estágio?

8. Uma empresa, que fabrica um certo tipo de peças, detetou algumas peças defeituosas. Foi inspecionada uma amostra com várias caixas, contendo, cada uma, 100 peças, tendo-se verificado o seguinte:

Número de peças defeituosas	1	2	3	4	5	6
Número de caixas	5	38	42	67	15	3

8.1 Qual é a dimensão da amostra?

8.2 Na figura, está representado o diagrama de extremos e quartis desta amostra.



Indica os valores de a , b , c , d e e e determina a amplitude interquartil.

8.3 Determina P_{65} .

8.4 Completa cada uma das frases seguintes, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela anterior.

Escreve, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a**, **b**, ou **c**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A moda desta amostra é __**I**__ e o valor da média, arredondado às centésimas, é __**II**__.

A percentagem de caixas com menos de quatro peças defeituosas é __**III**__.

O valor do desvio-padrão desta amostra, arredondado às centésimas, é __**IV**__.

I	II	III	IV
a. 2	a. 3,34	a. 11%	a. 1,06
b. 3	b. 3,44	b. 50%	b. 1,07
c. 4	c. 3,54	c. 89%	c. 1,08

9. Os dados seguintes referem-se ao peso, em quilogramas, dos bebés recém-nascidos numa maternidade num determinado período.

Peso (quilogramas)	Frequências relativas acumuladas (%)
[1,6; 2,0[10
[2,0; 2,4[20
[2,4; 2,8[40
[2,8; 3,2[70
[3,2; 3,6[97
[3,6; 4,0[100

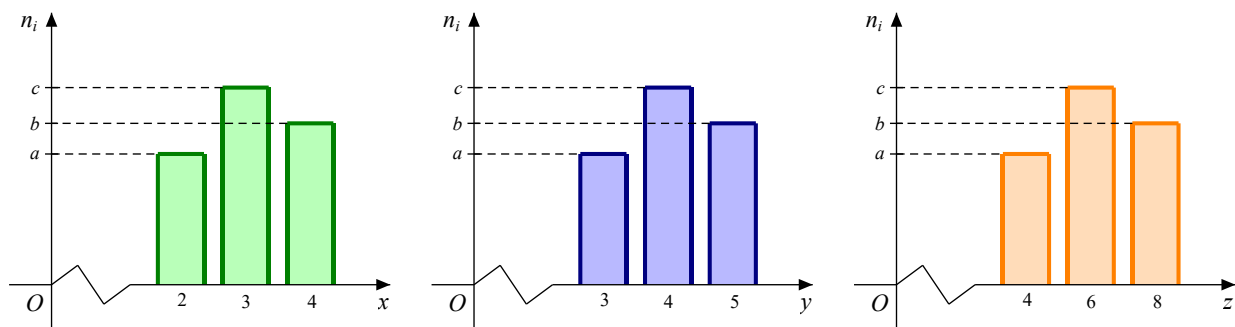
9.1 A variável estatística deste estudo é qualitativa, quantitativa discreta ou quantitativa contínua?

9.2 Justifica que a classe modal e a classe mediana é a mesma, e indica essa classe.

9.3 Determina, justificando, P_{70} e interpreta esse valor no contexto da situação.

9.4 Determina uma estimativa da média dos pesos, em quilogramas, dos bebés recém-nascidos naquela maternidade, naquele período.

10. Considera os seguintes gráficos de barras, referentes a três amostras X , Y e Z .



Qual das seguintes afirmações é falsa?

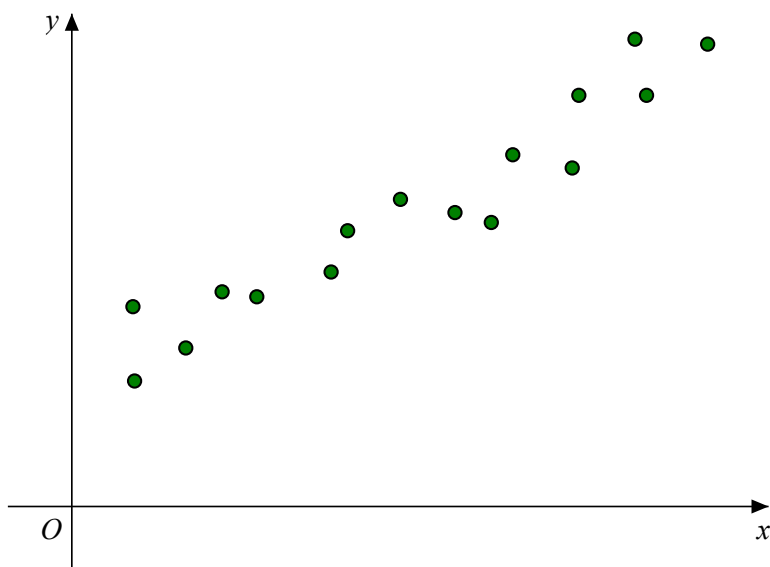
A $\bar{x} = \bar{y}$

C $\bar{z} = \bar{x} + 2$

B $\bar{y} = \bar{x} + 1$

D $\bar{x} = 2\bar{z}$

11. Na figura, está representado o diagrama de dispersão relativo à relação entre duas variáveis, x e y .



Numa das opções seguintes, apresentam-se o coeficiente de correlação linear, r , e a equação reduzida da reta de regressão linear, de y sobre x .

Em qual?

A $r \approx 0,15$ e $y = 0,783x + 116,9$

C $r \approx 0,15$ e $y = -0,783x + 116,9$

B $r \approx 0,93$ e $y = 0,783x + 116,9$

DD $r \approx 0,93$ e $y = -0,783x + 116,9$

12. Na tabela, apresentam-se oito medições efetuadas da velocidade, em km/h, de um veículo indicada no seu velocímetro, e da respetiva velocidade indicada num navegador de GPS.

Velocidade no velocímetro (km/h)	20	40	50	60	80	100	120	130
Velocidade no GPS (km/h)	19,9	39,5	48,3	58	77,8	97,6	117	126,8

Considera que existe correlação linear entre a velocidade indicada no velocímetro e a velocidade indicada no navegador de GPS.

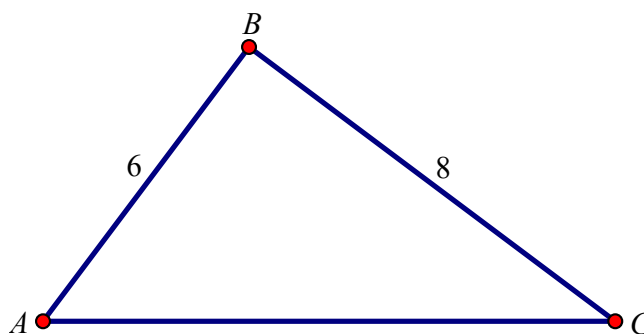
Numa deslocação, num dado instante, o velocímetro do veículo indica uma velocidade de 110 km/h.

Qual deverá ser a velocidade indicada no GPS, de acordo com o modelo de regressão linear?

Na tua resposta, apresenta os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear, com quatro casas decimais, e o resultado arredondado às décimas.

Geometria sintética

13. Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$, retângulo em B , tal que $\overline{AB} = 6$ e $\overline{BC} = 8$.



13.1 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ A O circuncentro é o ponto B .
- ☐ B O baricentro está no interior do triângulo $[ABC]$.
- ☐ C O ortocentro é o ponto médio do lado $[AC]$.
- ☐ D O incentro está no exterior do triângulo $[ABC]$.

13.2 Justifica a seguinte afirmação:

«A reta de Euler do triângulo $[ABC]$ contém o ponto B e o ponto médio do lado $[AC]$.»

13.3 Mostra que a medida do raio da circunferência circunscrita no triângulo $[ABC]$ é 5 e calcula a área do círculo limitado por essa circunferência.

13.4 Qual é o comprimento da circunferência dos nove pontos do triângulo $[ABC]$?

A $\frac{5\pi}{4}$

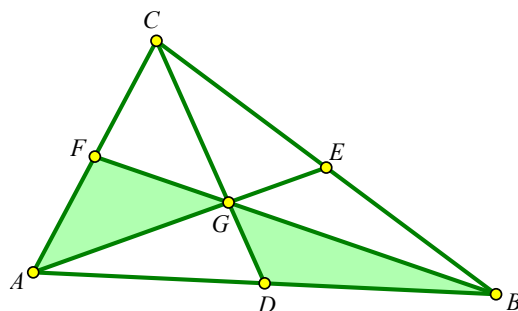
B $\frac{5\pi}{2}$

C 5π

D 10π

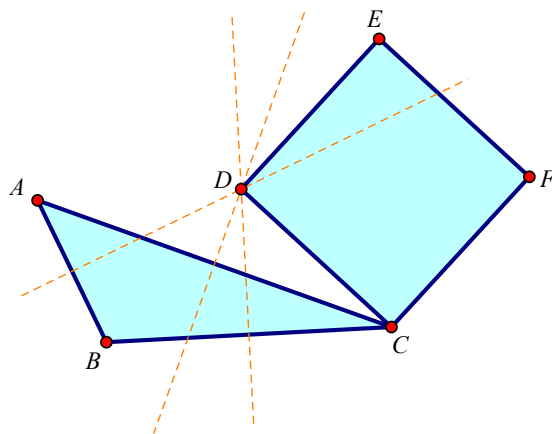
14. Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que D , E e F são os pontos médios dos lados do triângulo e que a medida da área da região sombreada no triângulo $[ABC]$ é $\frac{22}{9}$.



Qual é a medida da área do triângulo $[ABC]$?

15. Na figura, estão representados o triângulo $[ABC]$ e o quadrado $[CDEF]$.



As retas a tracejado são as mediatrizes dos lados do triângulo e intersectam-se no ponto D .

15.1 Justifica que D é o circuncentro do triângulo $[ABC]$.

15.2 Mostra que o ponto E pertence à circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.

16. Teste de Geometria Sintética no GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/bg2hdxnf>

FIM