Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Para responder aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Indique na folha de respostas o número do item e a letra correspondente à opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na Figura 1 está representado, em referencial o. n. Oxy, o gráfico da função *f*.

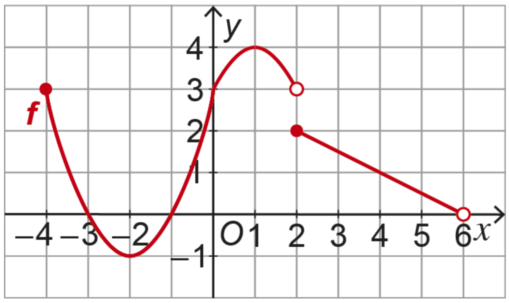


Figura 1

1.1. Complete o texto, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na figura.

Relativamente à função f podemos afirmar que o seu domínio é D_f = ___**I**___ e o seu contradomínio é D'_f = ___**II**___.

A função admite ___**III**___ zeros e tem ___**IV**___ extremos.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

I	II	III	IV
a) $]-4, 6]$ b) $[-4, 6[$ c) $[-4, 6]$	a) $]-1,4[$ b) $]-1, 4]$ c) $[-1, 4]$	a) 2 b) 3 c) 4	a) 2 b) 3 c) 4

1.2. Considere as proposições seguintes.

I. 3 é máximo absoluto da função.

II. A equação $f(x) = 3$ tem três soluções distintas.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

2. Na Figura 2, estão representadas, em referencial o. n. Oxy, uma reta e uma parábola, gráficos das funções f e g, respetivamente.

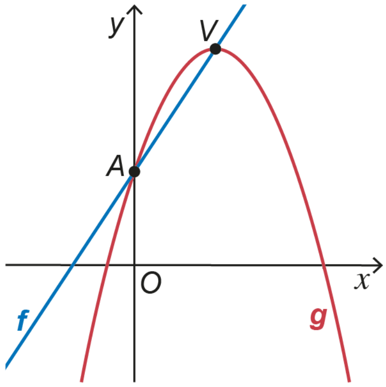


Figura 2

Sabe-se que:

- os pontos *A* e *V* são os pontos de interseção dos gráficos das funções f e g;
- o vértice da parábola, *V*, tem coordenadas $(3, 8)$;
- as coordenadas do ponto *A* são $\left(0, \frac{7}{2}\right)$.

2.1. Qual é a expressão que define a função f?

(A) $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

(B) $f(x) = \frac{3}{2}x + 8$

(C) $f(x) = 3x + \frac{7}{2}$

(D) $f(x) = 3x + 8$

2.2. Mostre que a função g é definida por $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 8$.

2.3. Calcule analiticamente os zeros das funções f e g.

2.4. Qual é o conjunto-solução da condição $g(x) \geq f(x)$?

(A) $]-\infty, -1] \cup [7, +\infty[$

(B) $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

(C) $[0, 3]$

(D) $[-1, 7]$

3. Considere, para um certo valor de k real, a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + kx + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Sabe-se que $h(1) + h(2) = -1$.

3.1. Mostre que $k = -2$.

3.2. Na Figura 3, está representado, em referencial o. n. Oxy, parte do gráfico da função h.

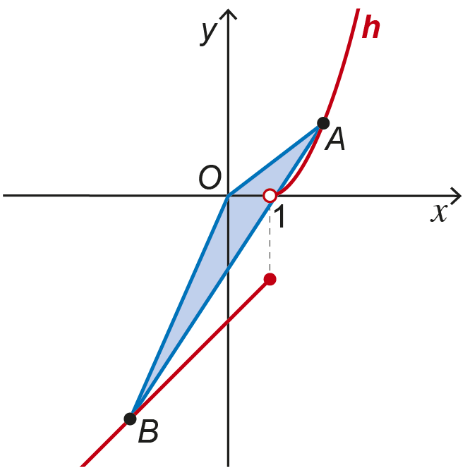


Figura 3

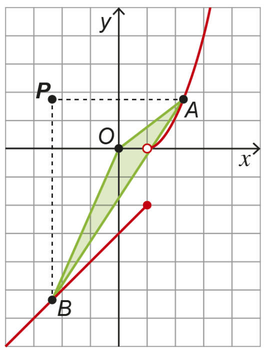
Considere um ponto *A*, que se desloca sobre o gráfico da função h, no primeiro quadrante.

Para cada posição do ponto *A*, seja *B* o ponto do gráfico da função h cuja abcissa é simétrica da abcissa do ponto *A*.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, os valores de a para os quais a área do triângulo [*OAB*] é igual a 4.

Na sua resposta:

- se lhe for útil considere o ponto *P*, com a abcissa de *B* e a ordenada de *A*, como representado na figura;
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente os valores de a arredondados às décimas.



4. Na Figura 4, está representado, em referencial o. n. Oxy, o retângulo [*ABCD*].

Sabe-se que:

- os pontos *A* e *B* pertencem aos eixos Oy e Ox, respetivamente;
- a reta *AB* tem equação $y = -2x + 4$;
- o ponto *C* é o transformado de *A* pela reflexão cujo eixo é a reta de equação $x = 5$.

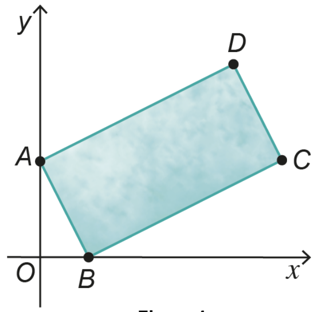


Figura 4

4.1. Justifique que os pontos *A*, *B* e *C* têm coordenadas $(0, 4)$, $(2, 0)$ e $(10, 4)$, respetivamente.

4.2. Determine as coordenadas do ponto *D*.

Sugestão: Comece por determinar as equações da reta que passa em *A* e é paralela a *BC* bem como da reta que passa em *C* e é paralela a *BA*.

4.3. Sejam *M* e *N* os pontos médios dos segmentos de reta [*AB*] e [*BC*], respetivamente.

Escreva a equação reduzida da circunferência de centro *M* e que passa em *N*.
Apresente todos os cálculos que tiver de efetuar.

4.4. Qual das seguintes equações pode definir a mediatriz do segmento de reta [*AB*]?

(A) $x + y - 3 = 0$ **(B)** $x - y + 3 = 0$

(C) $x + 2y - 3 = 0$ **(D)** $x - 2y + 3 = 0$

5. Em referencial Oxy, a condição $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge x + y = 0$ define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π **(B)** 4

(C) 8 **(D)** 16

FIM

Cotações

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**4.4.**	**5.**	**Total**
15	16	10	16	18	10	16	20	16	24	15	12	12	200

Proposta de resolução

1.

1.1. I – b); II – c); III – a); IV – b)

1.2.

I – A afirmação é falsa, porque existe, $x \in D_f$, tal que $f(x) \geq 3$. Por exemplo, $f(1) = 4$.

II – A equação tem apenas duas soluções, ou seja, $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 0$.

2.

2.1. Como o gráfico de f é uma reta que passa em $(3,8)$ e $\left(0, \frac{7}{2}\right)$, o declive é $m = \frac{8-\frac{7}{2}}{3-0} = \frac{3}{2}$ e a sua ordenada na origem é $\frac{7}{2}$. Portanto, $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Resposta **(A)**

2.2. Como o gráfico de g é uma parábola de vértice $(3,8)$, temos que $g(x) = a(x-3)^2 + 8,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Como o gráfico de g passa em $\left(0, \frac{7}{2}\right)$, temos:

$$g(0) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow a(0-3)^2 + 8 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 9a = \frac{7}{2} - 8 \Leftrightarrow 9a = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Concluímos assim que $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 8$.

2.3. Calcular o zero de f:

$$\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow 3x + 7 = 0 \Leftrightarrow 3x = -7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{3}$$

Calcular os zeros de g:

$$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-3)^2 = -8 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = -4 \vee x - 3 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 7$$

O zero de f é $-\frac{7}{3}$ e os zeros de g são -1 e 7.

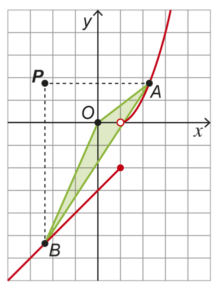
2.4. Resposta **(C)**

3.

3.1. $h(1) + h(2) = -1 \Leftrightarrow (1-3) + (2^2 + k \times 2 + 1) = -1 \Leftrightarrow -2 + 5 + 2k = -1 \Leftrightarrow 2k = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -2$

3.2. Como os pontos *A* e *B* pertencem ao gráfico de h, a abcissa de *A* é $a > 1$ e *B* tem abcissa simétrica à abcissa de *A*, temos que as suas coordenadas são $A(a, a^2 - 2a + 1)$ e $B(-a, -a-3)$.



A área do triângulo [*OAB*] pode ser obtida por:

$A_{[OAB]} = A_{[ABP]} - A_{[POA]} - A_{[POB]} = \frac{1}{2} \times \left(\overline{PA} \times \overline{PB} - \overline{PA} \times y_A - \overline{PB} \times |x_B|\right)$

Temos que:

- $\overline{PA} = a - (-a) = 2a$
- $\overline{PB} = y_A - y_B = a^2 - 2a + 1 - (-a-3) = a^2 - a + 4$

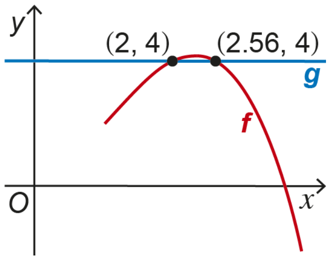
Substituindo em $\frac{1}{2} \times \left(\overline{PA} \times \overline{PB} - \overline{PA} \times y_A - \overline{PB} \times |x_B|\right)$, obtemos:

$$A_{[OAB]} = \frac{1}{2} \times [2a \times (a^2 - a + 4) - 2a \times (a^2 - 2a + 1) - (a^2 - a + 4) \times a] = \frac{-a^3 + 3a^2 + 2a}{2}$$

Para determinar a, sabemos que $A_{[OAB]} = 4$, portanto obtemos a equação:

$$\frac{-a^3 + 3a^2 + 2a}{2} = 4$$

Recorrendo à calculadora, consideramos as funções $f(x) = \frac{-x^3+3x^2+2x}{2}$ e $g(x) = 4$ para $x > 1$, obtemos o seguinte gráfico.



Os valores de a, com aproximação às décimas, para o qual a área do triângulo [*OAB*] é 4 são $a = 2{,}0$ e $a = 2{,}6$.

4.

4.1. O pontos *A* pertencem ao eixo Oy e à reta de equação $y = -2x + 4$. Logo, o ponto *A* tem coordenadas (0, 4).

Como *B* pertencem ao eixo Ox e tem ordenada zero, temos $0 = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Portanto, o ponto *B* tem coordenadas (2, 0).

Como o ponto *C* é o transformado de *A* pela reflexão de eixo $x = 5$, sendo $C(x_0, y_0)$ e como $A(4\,,0)$, vem $x_0 = 10$ e $x_0 - 5 = 5 - 0 \Leftrightarrow x_0 = 10$. Logo, $C(10\,,4)$.

4.2. $A(0, 4), B(2, 0)$ e $C(10, 4)$,

Reta *AD*: $y = mx + b$

$$m = m_{BC} = \frac{4-0}{10-2} = \frac{1}{2}$$

Como $y = \frac{1}{2}x + b$ e $A(0, 4)$ pertence à reta vem $b = 4$

A equação da reta AD: $y = \frac{1}{2}x + 4$

Reta *CD*: $y = mx + b$

$$m = m_{BA} = \frac{0-4}{2-0} = -2$$

Como $y = -2x + b$ e $C(10, 4)$ pertence à reta vem

$4 = -2 \times 10 + b \Leftrightarrow b = 24$

A equação da reta CD: $y = -2x + 24$

D é o ponto de interseção das retas *AD* e *CD*.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = -2x + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 24 = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = -2x + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases}$$

Portanto, *D* tem coordenadas $(8\,,8)$.

4.3. Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos médios:

- $M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1, 2)$
- $N\left(\frac{10+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (6, 2)$

O raio da circunferência é a distância entre *M* e *N*, logo é $\overline{MN} = \sqrt{(1-6)^2 + (2-2)^2} = 5$.

A equação reduzida da circunferência de centro *M* e que passa em *N* é $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

4.4. Seja *P* um ponto qualquer da mediatriz do segmento de reta [*AB*], temos que $\overline{AP} = \overline{BP}$, ou seja,

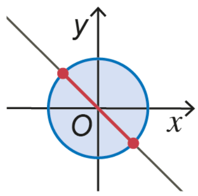
$(x-0)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8y + 16 = -4x + 4 \Leftrightarrow 4x - 8y + 12 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0$

Resposta: **(D)**

5. O círculo está centrado na origem e tem raio $\sqrt{16} = 4$. A equação $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$ é uma reta que passa na origem. Portanto, a condição $x^2 + y^2 \leq 16 \wedge x + y = 0$ define um diâmetro, logo o seu comprimento é 8.



Resposta: **(C)**