Proposta de teste de avaliação

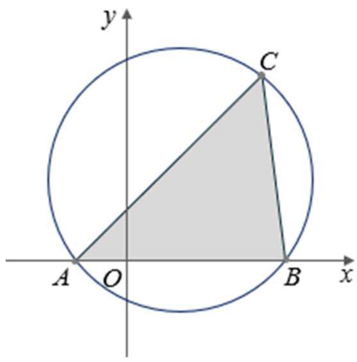
Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Para responder aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Indique na folha de respostas o número do item e a letra correspondente à opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos o s cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representada, em referencial o. n. Oxy, um triângulo $[ABC]$ e uma circunferência circunscrita.



Sabe-se que as coordenadas dos pontos A, B e C são $(-2, 0)$, $(6, 0)$ e $(5, 7)$, respetivamente.

1.1. Mostre que a reta que passa nos pontos médios dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ é paralela à reta AC.

1.2. Escreva uma equação vetorial da reta BC.

1.3. Qual das seguintes equações representa a mediatriz do segmento de reta $[AB]$?

(A) $x = 2$ **(B)** $x = 3$ **(C)** $x = 4$ **(D)** $x = 5$

1.4. Determine, analiticamente, a equação reduzida da mediana do triângulo que passa no vértice B.

1.5. O centro da circunferência é o ponto de interseção das:

(A) retas-suporte das alturas do triângulo $[ABC]$.

(B) bissetrizes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

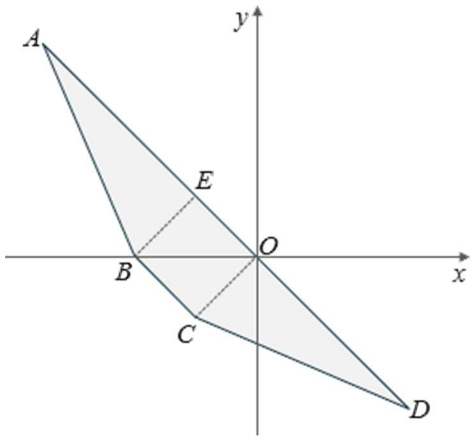
(C) medianas do triângulo $[ABC]$

(D) mediatrizes dos lados do triângulo $[ABC]$.

1.6. Mostre que o centro da circunferência circunscrita tem coordenadas $(2, 3)$.

1.7. Determine, analiticamente, as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy.

2. Na figura, está representado, em referencial o. n. xOy, o trapézio isósceles $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- os pontos A, E e D pertencem à bissetriz dos quadrantes pares;
- o ponto B pertence ao semieixo negativo Ox;
- $[OEBC]$ é um quadrado;
- as coordenadas do ponto A são $(-7, 7)$;
- $\overline{EC} = 4$.

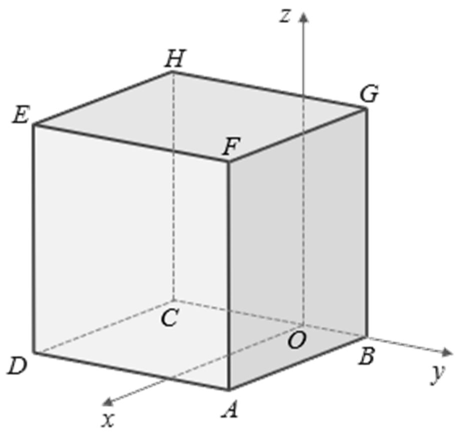
Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A abcissa do ponto B é __**I**__, o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ tem coordenadas __**II**__, as coordenadas de um vetor colinear com o vetor $\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas __**III**__ e as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}$ são __**IV**__.

I	II	III	IV
a) -2 **b)** -4 **c)** -5	**a)** $\left(-\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$ **b)** $\left(-2, \frac{7}{2}\right)$ **c)** $\left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$	**a)** $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ **b)** $(-1, -1)$ **c)** $(-1, 1)$	**a)** $(-5, 5)$ **b)** $(-1, 9)$ **c)** $(2, -7)$

3. Na figura, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$ em referencial o. n. $Oxyz$.



Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano coordenado xOy ;
- os vértices B e C pertencem ao eixo Oy , sendo B o de maior ordenada;
- a área lateral do cubo é $64\ \text{cm}^2$;
- $\overline{BC} = 3 \times \overline{OB}$

Considere as proposições seguintes.

I. A medida da aresta do cubo é 3 cm.

II. As coordenadas do ponto E são $(4, -2, 4)$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a região definida por:

$$(x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 \leq 25 \ \wedge \ x = 0$$

Qual é a área dessa região?

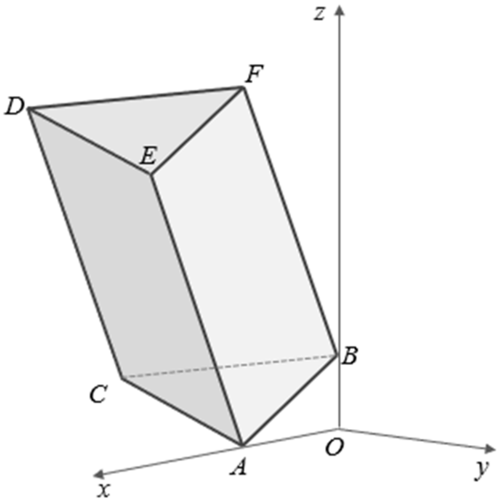
(A) 4π

(B) 5π

(C) 16π

(D) 25π

5. Na figura, está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um prisma reto $[ABCDEF]$.



Sabe-se que:

- os vértices A e B pertencem ao eixo Ox e ao eixo Oz, respetivamente;
- $\overline{AC} = \overline{BC}$
- $\overrightarrow{DE}$ tem coordenadas $\left(1, 3, -\frac{1}{2}\right)$ e $\overrightarrow{DF}$ tem coordenadas $\left(-1, 3, \frac{1}{2}\right)$;
- o volume do prisma é 15;
- o plano ABC pode ser definido pela equação $x + 2z - 2 = 0$.

5.1. Quais são as coordenadas dos pontos A e B?

(A) $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$

(B) $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$

(C) $(2, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$

(D) $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$

5.2. Escreva uma equação vetorial da reta AC.

5.3. Determine a altura do prisma.

FIM

Cotações

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**1.5.**	**1.6.**	**1.7.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**Total**
18	16	10	18	10	20	18	16	18	10	10	18	18	200

Proposta de resolução

1.

1.1. Começo por determinar as coordenadas de M e N, pontos médios dos segmentos [AB] e [BC]:

- $M\left(\frac{-2+6}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(2,0)$
- $N\left(\frac{6+5}{2},\frac{0+7}{2}\right)=\left(\frac{11}{2},\frac{7}{2}\right)$

As retas AC e MN são paralelas se tiverem o mesmo declive.

Calcular os declives da reta:

- AC: $\frac{5-(-2)}{7-0}=1$
- MN: $\frac{\frac{7}{2}-0}{\frac{11}{2}-2}=1$

Concluímos que as retas são paralelas.

1.2. Um vetor diretor da reta BC: $\overrightarrow{BC}$ que tem coordenadas $(-1,7)$.

Uma equação vetorial da reta BC é $(x,y)=(6,0)+k(-1,7),\ k\in\mathbb{R}$.

1.3. A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é a reta paralela a Oy que passa no ponto médio de $[AB]$. Logo a sua equação é $x=2$.

Resposta: **(A)**

1.4. A mediana que passa em B passa no ponto médio do segmento de reta $[AC]$.

- Ponto médio de [AC]: $\left(\frac{-2+5}{2},\frac{0+7}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$
- Declive: $\frac{\frac{7}{2}-0}{\frac{3}{2}-6}=-\frac{7}{9}$
- Ordenada na origem: $0=-\frac{7}{9}\times 6+b \Leftrightarrow b=\frac{14}{3}$

A equação da mediana é $y=-\frac{7}{9}x+\frac{14}{3}$.

1.5. O centro da circunferência circunscrita é o circuncentro do triângulo $[ABC]$, logo é o ponto de interseção das mediatrizes.

Resposta: **(D)**

1.6. Mediatriz de $[AB]$: $x=2$

Mediatriz de $[AC]$:

$$(x+2)^2+y^2=(x-5)^2+(y-7)^2 \Leftrightarrow \qquad A(-7,7) \text{ e } C(5,7)$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2=x^2-10x+25+y^2-14y+49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14x+14y-70=0 \Leftrightarrow x+y-5=0$$

As coordenadas do centro é o ponto de interseção das mediatrizes, temos

$$\begin{cases} x=2 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

As coordenadas do centro da circunferência são $(2,3)$.

1.7. Começo por determinar a equação da circunferência. Já conheço o centro, falta determinar o raio que é a distância do centro ao ponto A, por exemplo.

$$\sqrt{(-2-2)^2+(0-3)^2}=5$$

Logo, a equação é $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.

A interseção como eixo Oy:

$$\begin{cases} x=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (0-2)^2+(y-3)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (y-3)^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3\pm\sqrt{21} \end{cases}$$

As coordenadas dos pontos de interseção são:

$\left(0, 3-\sqrt{21}\right)$ e $\left(0, 3+\sqrt{21}\right)$

2.

- Como $\overline{OB} = \overline{EC} = 4$, a abcissa de B é -4.
- O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $\left(\frac{-4-7}{2}, \frac{0+7}{2}\right) = \left(-\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$. $A(-7,7)$ e $B(-4,0)$
- $\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -2)$ $C(-2,-2)$

  $(-1,1)$ são as coordenadas de um vetor colinear com $\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{BA} = (-3,7)$ e $\overrightarrow{BE} = (2,2)$ $E(-2,2)$

  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} = (-3, 7) + (2, 2) = (-1, 9)$.

I – b); II – a); III – c); IV – b)

3. **I –** Como a área lateral é 64 cm^2, temos que $4a^2 = 64 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4$.

Logo a medida da aresta do cubo é 4 cm.

II – O ponto E tem abcissa e cota igual a 4.

Calcular a sua ordenada:

$$\overline{BC} = 4 \Leftrightarrow 3\overline{OB} = 4 \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{4}{3}$$

Logo, $\overline{OC} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Portanto, a ordenada de E é $-\frac{8}{3}$

As coordenadas de E são $\left(4, -\frac{8}{3}, 4\right)$

4. No plano de equação $x = 0$ vamos obter o círculo definido por

$(0-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 \leq 25 \Leftrightarrow y^2 + (z-5)^2 \leq 16$.

O círculo tem raio igual a 4

A sua área é $4^2 \times \pi = 16\pi$

Resposta **(C)**

5.

5.1. Os pontos A e B são a interseção do plano ABC com os eixos Ox e Oz, respetivamente:

- $x + 2z - 2 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 0 \wedge z = 0$

  As coordenadas de A são $(2, 0, 0)$.
- $x + 2z - 2 = 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 1$

  As coordenadas de B são $(0, 0, 1)$.

Resposta **(B)**

5.2. A reta AC é paralela à reta DE. Logo um vetor diretor é $\overrightarrow{DE}$ de coordenadas $\left(1,\ 3,\ -\frac{1}{2}\right)$.

Uma equação vetorial da reta AC é

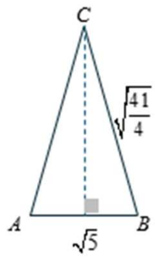
$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k\left(1,\ 3, -\frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{R}$$

5.3. Vamos começar por determinar a área do triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 9 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{41}{4}}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$



O triângulo $[ABC]$ é isósceles pois $\overline{AC} = \overline{BC}$

Seja x a altura do triângulo $[ABC]$.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\left(\sqrt{\frac{41}{4}}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{41}{4} = x^2 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 = 9 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 3$$

A altura do triângulo $[ABC]$ é 3, a sua área é $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Como o volume do prisma é o produto da área da base pela sua altura, temos que

$V_{[ABCDEF]} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \times \text{altura}$, ou seja

$$15 = \frac{3\sqrt{5}}{2} \times \text{altura}$$

$$\text{altura} = \frac{30}{3\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$