Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Porto Editora

Para responder aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Indique na folha de respostas o número do item e a letra correspondente à opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere, num referencial o. n. Oxy, os pontos A e B, de coordenadas $(-3, 5)$ e $(3, 7)$, respetivamente.

1.1. Qual das seguintes equações representa é uma reta paralela à reta *AB* e que passa no ponto de coordenadas $(0, 5)$?

(A) $y = \frac{1}{3}x + 5$ **(B)** $y = 3x + 5$ **(C)** $y = \frac{1}{3}x + 6$ **(D)** $y = 3x + 6$

1.2. Determine uma condição para o círculo de diâmetro $[AB]$.

1.3. Seja C o transformado de A por uma reflexão axial relativamente à bissetriz dos quadrantes pares.

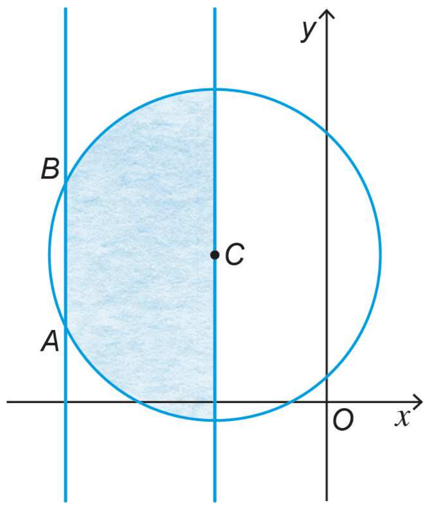
a) Quais são as coordenadas de C?

(A) $(3, 5)$ **(B)** $(5, 3)$ **(C)** $(-3,\ -5)$ **(D)** $(-5, 3)$

b) Sejam D e E os pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares tais que $[ACDE]$ é um retângulo.

Determine, analiticamente, as coordenadas dos pontos D e E, sendo D o de menor abcissa.

2. Na figura ao lado está representado em referencial o. n. Oxy, uma circunferência de centro C.



Sabe-se que:

- a equação da circunferência é $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 20$;
- os pontos A e B são os pontos de interseção da reta de equação $x = -7$ com a circunferência.

2.1. Determine as ordenadas dos pontos A e B.

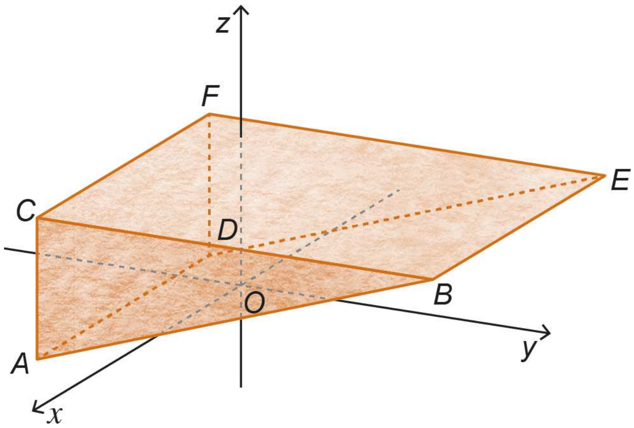
2.2. Escreva uma equação vetorial da reta *BC*.

2.3. Escreva uma condição que represente todos os pontos da região sombreada, incluindo a fronteira.

2.4. Considere o triângulo $[AOB]$.

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

3. Na figura seguinte, em referencial o. n. $Oxyz$, apresenta-se o prisma triangular reto $[ABCDEF]$.



Sabe-se que:

- o volume do prisma é igual a 30;
- $[ABC]$ e $[DEF]$ são triângulos retângulos em C e F, respetivamente;
- os pontos A e D pertencem ao plano Oxy;
- os pontos D, E e F têm abcissa negativa;
- a face $[ADFC]$ está contida num plano paralelo ao plano coordenado Oxz;
- o plano BEF tem equação $z = 2$;
- uma equação da reta AB é $(x, y, z) = (4, 2, 1) + k(0, 3, 1),\ k \in \mathbb{R}$.

3.1. Mostre que as coordenadas dos pontos A e B são $(4,\ -1,\ 0)$ e $(4, 5, 2)$, respetivamente.

3.2. Complete a frase seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados.

A abcissa dos pontos D, F e E é __**I**__ e a equação do plano mediador do segmento de reta $[FE]$ é __**II**__. Os vértices A, D, F e C pertencem à superfície esférica de raio __**III**__ e a reta CF é definida por __**IV**__.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

I	II	III	IV
a) $-\frac{1}{2}$ **b)** -1 **c)** -2	**a)** $y = 2$ **b)** $y = 3$ **c)** $z = 2$	**a)** 2 **b)** $\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{29}}{2}$	**a)** $z = 2$ **b)** $y = -1$ **c)** $y = -1 \wedge z = 2$

3.3. Considere as proposições seguintes.

I – O vértice A pertence à superfície esférica de diâmetro $[BC]$.

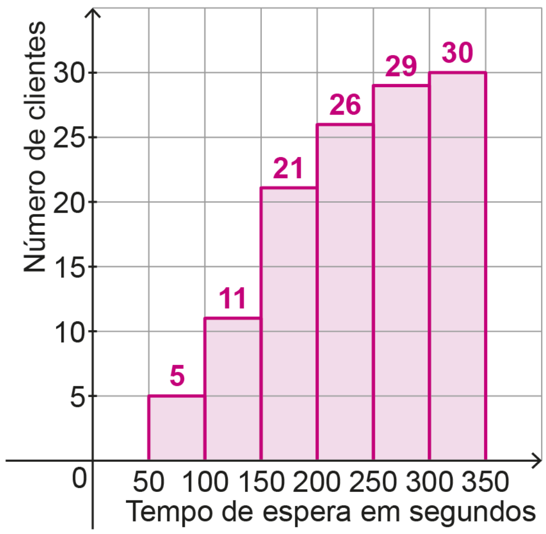
II – O vértice D pertence ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

4. No café do Máximo, registou-se o tempo, em segundos, que 30 clientes esperam para pagar.

Os resultados obtidos apresentam-se no histograma de frequências acumuladas da figura seguinte.



4.1. Qual é a classe modal?

(A) [50, 100[

(B) [100, 150[

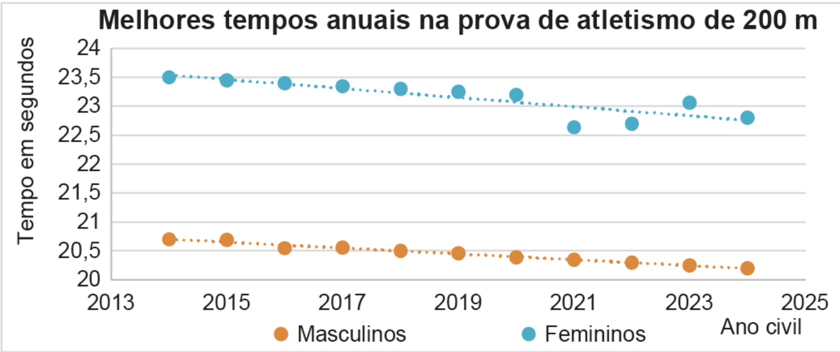
(C) [150, 200[

(D) [200, 250[

4.2. Construa o diagrama de extremos e quartis com recurso à função cumulativa.

4.3. Determine, em minutos, com arredondamento às unidades, quanto tempo, em média, espera cada cliente a pagar.

5. No gráfico da seguinte figura estão representados os diagramas de dispersão e as respetivas retas de regressão dos melhores tempos anuais da prova de atletismo nacional de 200 metros, femininos e masculinos, entre os anos 2014 e 2024.



5.1. Quais dos coeficientes de correlação seguintes mais se adequam aos diagramas dos atletas masculinos e femininos, respetivamente?

(A) $-0{,}08$ e $-0{,}05$

(B) $-0{,}05$ e $-0{,}08$

(C) $-0{,}85$ e $-0{,}99$

(D) $-0{,}99$ e $-0{,}85$

5.2. Os modelos de regressão linear que ajustam os tempos das provas de 200 metros, masculinos e femininos, são as retas r e s definidas pelas equações, cujos coeficientes estão com aproximação às centésimas:

$r\colon\ y = -0{,}05x + 122{,}13$

$s\colon\ y = -0{,}08x + 182{,}47$

Indique, **justificando,** qual das retas se ajusta aos tempos das provas de 200 metros femininos.

FIM

Cotações

Item																
Cotação (em pontos)																
1.1.	1.2.	1.3.a)	1.3.b)	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.	4.3	5.1.	5.2.	Total
10	14	10	14	12	12	12	12	16	14	15	10	15	12	10	12	200

Proposta de resolução

1.

1.1. O declive da reta é igual ao declive da reta *AB*, ou seja, é $\frac{7-5}{3-(-3)}=\frac{1}{3}$ e a sua ordenada na origem é 5.

Resposta: **(A)**

1.2. As coordenadas do centro do círculo de diâmetro [*AB*] é o ponto médio do segmento [*AB*] que tem coordenadas $\left(\frac{-3+3}{2},\frac{5+7}{2}\right)=(0,6)$.

O seu raio é a distância do centro ao ponto *A*, por exemplo.

$\sqrt{(-3-0)^2+(5-6)^2}=\sqrt{10}$

Logo, a sua condição é $x^2+(y-6)^2\leq 10$.

1.3.

a) Resposta: **(D)**

b) As coordenadas do ponto *D* são obtidas pela interseção da bissetriz dos quadrantes ímpares com a reta paralela r à bissetriz dos quadrantes pares e que passa em *C*, pois as bissetrizes são perpendiculares entre si.

Equação da reta r: $y=-x+b$ e passa em *C*. Temos que $3=-5+b \Leftrightarrow b=-2$.

Logo, a equação é $y=-x-2$.

Determinar as coordenadas do ponto D:

$$\begin{cases} y=x \\ y=-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto E: $E=D+\overrightarrow{CA}=(-1,-1)+(2,2)=(1,1)$

As coordenadas são $D(-1,\ -1)$ e $E(1,1)$.

2.

2.1. As coordenadas dos pontos são a interseção da circunferência com a reta de equação $x=-7$ e são obtidas por:

$$\begin{cases} x=-7 \\ (x+3)^2+(y-4)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ (-7+3)^2+(y-4)^2=20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ (y-4)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4\pm 2 \end{cases}$$

As coordenadas dos pontos de interseção são $A(-7,2)$ e $B(-7,6)$.

2.2. As coordenadas do ponto *C* são $(-3,4)$.

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{BC}$ são $(-3-(-7),4-6)=(4,-2)$.

Logo, uma equação vetorial da reta *BC* é $(x,y)=(-3,4)+(4,-2)k,\ k\in\mathbb{R}$

2.3. $(x+3)^2+(y-4)^2 \leq 20 \wedge -7 \leq x \leq -3$

2.4. Considerando a base do triângulo [*AB*], a sua altura em relação a essa base é a distância entre a origem e o ponto de coordenadas $(-7, 0)$.

Logo, a área do triângulo [*AOB*] é $\frac{4\times 7}{2} = 14\ \text{u.a.}$

3.

3.1. As coordenadas do ponto A são $(x, y, 0)$, ponto que pertence à reta AB, logo:

$$\begin{cases} x = 4 + 0k \\ y = 2 + 3k \\ 0 = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 - 3 \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ k = -1 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto B são $(x, y, 2)$, ponto que pertence à reta AB, logo:

$$\begin{cases} x = 4 + 0k \\ y = 2 + 3k \\ 2 = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 + 3 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ k = -1 \end{cases}$$

As coordenadas dos pontos A e B são $(4, -1, 0)$ e $(4, 5, 2)$.

3.2. Como o volume do prisma triângular é 30, temos que $\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2} \times \overline{AD} = 30 \Leftrightarrow \overline{AD} = 5$.

Logo, $4 - x_D = 5 \Leftrightarrow x_D = -1$. Temos que a abcissa dos pontos D, E e F é -1 .

As coordenadas de E e F são $(-1, 5, 2)$ e $(-1, -1, 2)$, respetivamente. Logo a equação do plano mediador do segmento de reta $[EF]$ é $y = 2$.

Os segmentos de reta $[AF]$ e $[CD]$ são diâmetros da superfície esférica, logo o raio é $\frac{\overline{AF}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

A reta CD é a interseção dos planos de equações $y = -1$ e $z = 2$, logo fica definida por $y = -1 \wedge z = 2$.

Resposta: I – b), II – a); III – c), IV – c)

3.3.

I – Para A pertencer à superfície esférica de diâmetro $[BC]$, a distância do ponto médio de $[BC]$ ao ponto A tem de ser igual a metade do comprimento do segmento $[BC]$, raio da superfície esférica.

As coordenadas do ponto médio de $[BC]$ são $(4, 2, 2)$ e $\overline{BC} = 6$. O raio da superfície esférica é 3.

A distância de $A(4, -1, 0)$ ao ponto de coordenadas $(4, 2, 2)$ é

$\sqrt{(4-4)^2 + (-1-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{13} \neq 3.$

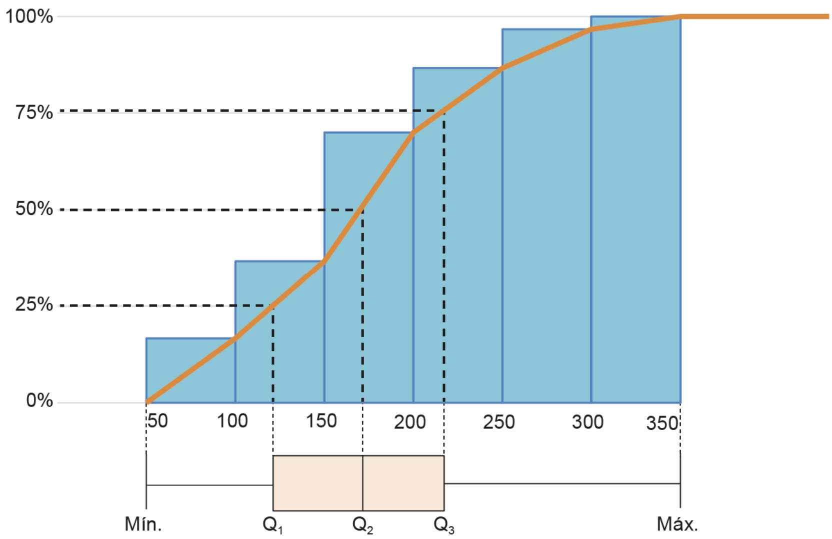
II – Para o ponto D pertencer ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$, temos que $d(A, D) = d(B, D)$, temos

$\sqrt{(-1-4)^2 + (-1-(-1))^2 + (0-0)^2} = 5 \neq \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-5)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{75}$

4.

4.1. Resposta **(C)**

4.2.



4.3. O tempo médio de espera é obtido por:

$$\frac{5\times 75+6\times 125+10\times 175+5\times 225+3\times 275+1\times 325}{30}=\frac{515}{3}\ \text{s}$$

O tempo de espera em minutos é $\frac{515}{3}\times\frac{1}{60}\approx 3\ \text{min}$.

O tempo médio de espera para pagar é 3 minutos.

5.

5.1. Resposta **(D)**

5.2. A reta s representa a reta de regressão do diagrama de dispersão da prova 200 metros femininos, pois o declive, em valor absoluto, é maior.