Teste de avaliação n.º 2

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome:	**| N.º:**	**| Turma:**
Duração do teste: 90 minutos	**| Tolerância:** 10 minutos	**| Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. A empresa TecnoMath, especializada em desenvolvimento de *software* educativo, viveu dois momentos distintos de participação e votação nos últimos anos.

1.1. No ano 2024, a TecnoMath lançou a iniciativa "Rosto TecnoMath", destinada a escolher o colaborador que melhor representava a empresa.

Os quatro finalistas — Ana (A), Bruno (B), Carla (C) e Daniel (D) — foram avaliados por clientes e parceiros da empresa.

Cada participante ordenou os quatro candidatos do 1.º ao 4.º lugar, de acordo com a sua preferência.

Foram apurados 1200 boletins válidos, agrupados em três tipos de listas de preferências (parcialmente preenchidas na tabela seguinte):

	Lista 1	**Lista 2**	**Lista 3**
	200 votos	**400 votos**	**600 votos**
1.ª Preferência	A		
2.ª Preferência		A	
3.ª Preferência		D	A
4.ª Preferência	D		

Para determinar o vencedor, aplicou-se o seguinte método de pontuação:

- 4 pontos por cada voto em 1.ª preferência;
- 3 pontos por cada voto em 2.ª preferência;
- 2 pontos por cada voto em 3.ª preferência;
- 1 ponto por cada voto em 4.ª preferência.

O candidato com maior pontuação total seria eleito "Rosto TecnoMath 2024".

Sabe-se que:

- o candidato Bruno (B) obteve um total de 1400 pontos;
- a pontuação total do Daniel (D) foi inferior à pontuação total da Ana (A).

Com base nestas informações e as referidas na tabela, determine a ordenação dos candidatos A, B, C e D na Lista 3 (do 1.º ao 4.º lugar).

Na sua resposta, apresente todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

1.2. No ano seguinte, em 2025, a TecnoMath realizou uma Assembleia Geral de Acionistas para escolher uma nova Direção.

Apurados os resultados, verificou-se que:

- o número de votos válidos foi de 7200, que representam 96% do total de votos depositados nas urnas, os restantes 4% correspondem a votos nulos ou brancos;
- existiu uma abstenção de 20% entre os acionistas com direito de voto.

Qual era o número total de acionistas da empresa TecnoMath à data desta Assembleia?

(A) 7500 **(B)** 9000 **(C)** 9375 **(D)** 37 500

2. A Sara trabalha como assistente administrativa na empresa LogiData. Com o objetivo de garantir um futuro mais estável para o filho, Miguel, a Sara tem procurado gerir cuidadosamente o seu rendimento mensal e poupar parte do seu salário.

2.1. No mês de março de 2023, a Sara recebeu o seu vencimento mensal, cujo recibo apresentava as seguintes informações:

LogiData	
Sara Oliveira N.º de Contribuinte: 00000 N.º de Beneficiário: 00000	**Período:** 2023-03-01 a 2023-03-31

Descrição	**Taxa**	**Valor €**
Remuneração-base		?
TSU (Segurança Social)	11%	?
IRS	11,4%	196,08
Subsídio de alimentação		?
	Total a receber	? **EUR**

Durante esse mês, a Sara trabalhou 22 dias úteis e recebeu 6 € por dia de subsídio de alimentação, valor isento de impostos e contribuições.
O montante "Total a receber" corresponde ao valor efetivo que a trabalhadora recebeu no final do mês, já depois dos descontos e incluindo o subsídio de alimentação.

Com base nestas informações, o valor total que a Sara recebeu no final do mês de março de 2023 foi:

(A) 1334,72 € **(B)** 1466,72 € **(C)** 1452,20 € **(D)** 1437,15 €

2.2. Com parte das suas poupanças mensais, a Sara decidiu abrir uma conta--poupança em nome do filho, Miguel, quando este tinha 5 anos.

Ao completar 18 anos, o Miguel encerrou a conta e verificou que o saldo era de 4545,14 €.

Durante os 13 anos em que a conta esteve ativa:

- o dinheiro esteve sujeito a juro composto;
- a taxa anual aplicada foi de 3,2%;
- o sistema de capitalizações foi mensal.

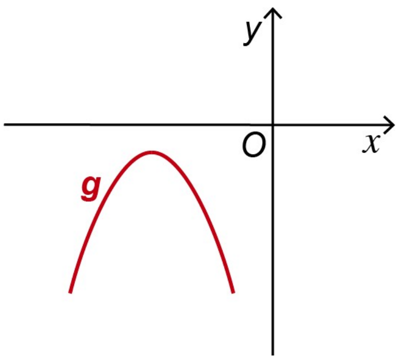
Não foram efetuados depósitos adicionais nem levantamentos durante esse período.

Determine o valor do depósito inicial realizado pela Sara quando abriu a conta--poupança do Miguel.

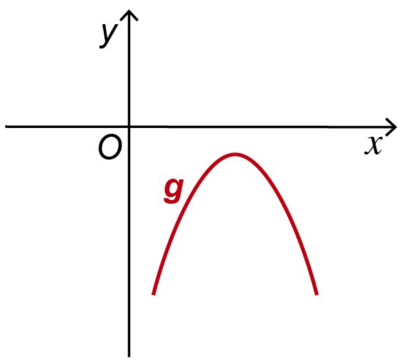
Apresente o resultado arredondado às unidades.

3. Em qual das opções pode estar representada parte do gráfico da função quadrática definida por $g(x) = -2(x+c)^2 + d$, com $c < 0$ e $d > 0$?

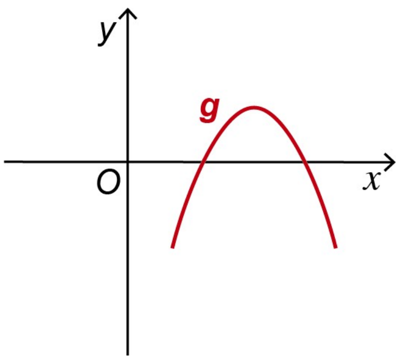
(A)



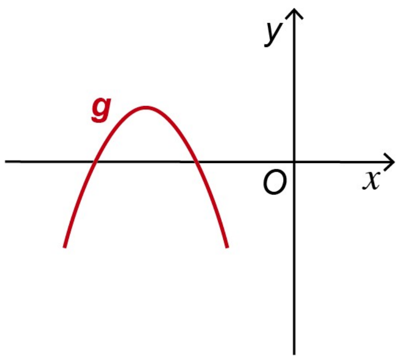
(B)



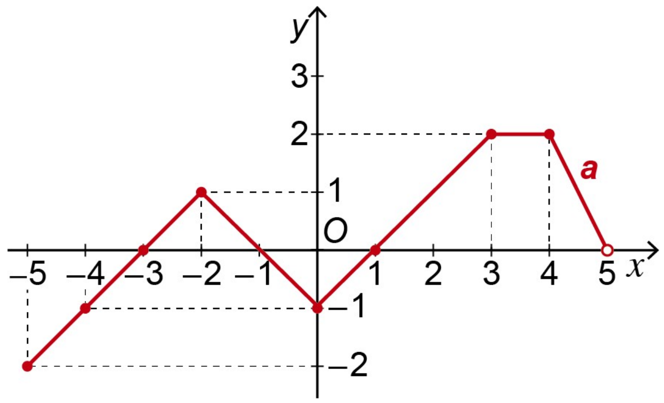
(C)



(D)



4. Seja a a função representada no referencial Oxy da figura.



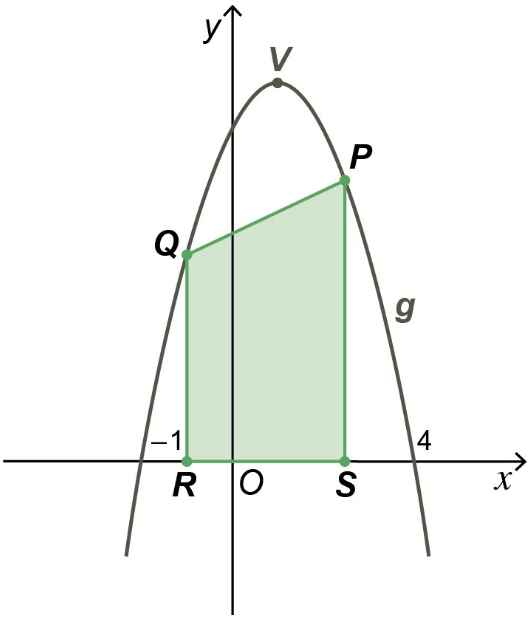
Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.
Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II e III, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

É possível concluir que:

- os maximizantes de a são **__I__** ;
- o intervalo aberto de maior amplitude em que a função a é estritamente crescente e positiva é **__II__**;
- o conjunto-solução da condição $a(x) > -1$ é **__III__**.

I	II	III
a) $\{-2\} \cup [3, 4]$	**a)** $]1, 3[$	**a)** $]-4, 5[\backslash \{-1\}$
b) $\{-2\} \cup]3, 4[$	**b)** $]-5, -2[$	**b)** $]-4, 5[\backslash \{0\}$
c) $\{-2\} \cup [3, 4[$	**c)** $]4, 5[$	**c)** $[-4, 5] \backslash \{5\}$

5. No referencial Oxy da figura, está representada uma função quadrática g e um trapézio $[PQRS]$.



Sabe-se que:

- o ponto P pertence ao gráfico da função g e tem abcissa x, com $x \in [0, 4[$;
- o ponto Q é o ponto do gráfico da função g que tem abcissa -1;
- os pontos R e S são as projeções ortogonais de Q e P, respetivamente, no eixo das abcissas;
- o ponto V tem coordenadas $(1, 9)$ e corresponde ao vértice da parábola que representa a função g;
- 4 é um zero da função g.

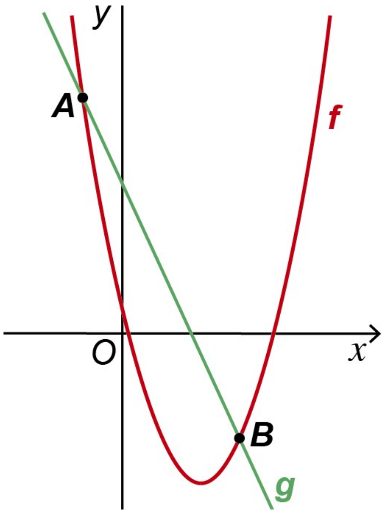
5.1. Mostre que a função g pode ser definida analiticamente por $g(x) = -x^2 + 2x + 8$.

5.2. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine para que valores de x a medida da área do trapézio $[PQRS]$ é igual a 10.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Sugestão: comece por provar que a medida da área do trapézio $[PQRS]$ pode ser dada por $y = \frac{-x^3 + x^2 + 15 \quad + 13}{2}$, $x \in [0, 4[$.

6. No referencial Oxy da figura, estão representadas duas funções f e g.



Sabe-se que:

- f é uma função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$;
- g é uma função afim definida por $g(x) = -4x + 7$;
- os pontos A e B são os pontos de interseção dos gráficos de f e g, sendo a abcissa de A negativa e a abcissa de B positiva.

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos resolve os seguintes três itens.

Determine:

6.1. o contradomínio da função f;

6.2. a medida do comprimento do segmento de reta $[AB]$;

6.3. o conjunto-solução da condição $f(x) > -5x$.
Apresente a resposta na forma de reunião de intervalos.

7. Considere a família de funções afins, f_k, definida por $f_k(x) = \frac{4-(k+2)x}{3}$, com $k \in \mathbb{R}$, e a função quadrática g, definida por $g(x) = x^2 - 2x + \frac{7}{3}$.

7.1. Para que valores de k a função f_k é estritamente crescente?

(A) $k > -2$ **(B)** $k < -2$ **(C)** $k > 2$ **(D)** $k < 2$

7.2. Admita que $k = 10$.

Considere a proposição:

"Os gráficos das funções f e g intersetam-se em, exatamente, um ponto."

Sem recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora e sem resolver a equação $f(x) = g(x)$, justifique que a proposição é verdadeira.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.1**	**5.2**	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**7.1**	**7.2.**	**Total**
20	10	10	20	10	10	20	20	20	20	20	10	10	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1.

1.1. Pontuação total do candidato A: $4 \times 200 + 3 \times 400 + 2 \times 600 = 3200$

Como o candidato B obteve um total de 1400 pontos, e sabemos que não ficou na 4.ª preferência da lista 1 (porque essa preferência foi dada ao candidato D), então ficou na 4.ª preferência das listas 2 e 3, e na 3.ª preferência da lista 1, porque é a única forma de somar apenas 1400 pontos: $2 \times 200 + 1 \times 400 + 1 \times 600 = 1400$.

Relativamente à pontuação do candidato D, sabemos que não ficou na primeira preferência da lista 3, porque assim teria mais pontos que o candidato A, $1 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 600 = 3400 > 3200$, e como também não ficou na 4.ª preferência nessa lista (candidato B) nem na 3.ª (candidato A), então a sua preferência é a 2.ª.

Assim, o candidato C ocupa a 1.ª preferência da lista 3, por ser o único candidato e a única preferência ainda não determinada. Desta forma a ordenação dos candidatos na lista 3, é:

	1.ª Preferência	2.ª Preferência	3.ª Preferência	4.ª Preferência
Candidato	C	D	A	B

Candidato A: $4 \times 200 + 3 \times 400 + 2 \times 600 = 3200$

Candidato B: $2 \times 200 + 1 \times 400 + 1 \times 600 = 1400$

Candidato C: $2 \times 200 + 4 \times 400 + 4 \times 600 = 4400$

Candidato D: $1 \times 200 + 2 \times 400 + 3 \times 600 = 2800$

1.º lugar: Candidato C; 2.º lugar: Candidato A; 3.º lugar: Candidato D e 4.º lugar: Candidato B.

1.2. O número total de votos validamente expressos foi 7200, correspondentes a 96% dos votos apurados, pelo que o número de votos apurados (VA), é:

$$\begin{array}{l} VA \rightarrow 7200 \\ 100 \rightarrow \ \ 96 \end{array} \qquad VA = \frac{7200 \times 100}{96} = 7500$$

Como a abstenção foi de 20%, o número de votos apurados (VA), corresponde a $100 - 20 = 80\%$ do número de acionistas da empresa que poderiam ter votado (NA), ou seja:

$$\begin{array}{l} NA \rightarrow 7500 \\ 100 \rightarrow \ \ 80 \end{array} \qquad NA = \frac{7500 \times 100}{80} = 9375$$

Opção (C)

2.

2.1. Subsídio de refeição: $22 \times 6 = 132$ €

O IRS representa 11,4% da remuneração-base.

Designando por R a remuneração-base da Sara:

$$0{,}114 \times R = 196{,}08 \Leftrightarrow R = \frac{196{,}08}{0{,}114} \Leftrightarrow R = 1720{,}00 \text{ €}$$

O desconto da Segurança Social é de 11%:

$0{,}11 \times 1720 = 189{,}20$ €

Remuneração líquida (sem subsídio):

$1720 - 189{,}20 - 196{,}08 = 1334{,}72$ €

Adicionando o subsídio de alimentação:

$1334{,}72 + 132 = 1466{,}72$ €

Opção (B)

2.2. $C_f = C_i(1+r)^n$

$$4545{,}14 = C_i\left(1 + \frac{0{,}032}{12}\right)^{13\times 12} \Leftrightarrow C_i = \frac{4545{,}14}{\left(1 + \frac{0{,}032}{12}\right)^{13\times 12}}$$

$C_i \approx 3000$ €

3. Como a função quadrática g está definida na forma $y = a(x-h)^2 + k$, então sabemos que o vértice da parábola, que representa a função g, tem coordenadas $V(-c, d)$.

Temos que $c < 0$, então $-c > 0$.

Como $-c > 0$ e $d > 0$, o vértice pertence ao 1.º quadrante, uma vez que as suas coordenadas são ambas positivas.

Opção (C)

4.

- Maximizantes de a: $\{-2\} \cup [3, 4]$
- Intervalo aberto de maior amplitude em que a função a é estritamente crescente e positiva: $]1, 3[$
- $a(x) > -1 \Leftrightarrow]-4, 5[\backslash\{0\}$

$\boldsymbol{I \longrightarrow a)} \quad ; \quad \boldsymbol{II \longrightarrow a)} \quad ; \quad \boldsymbol{III \longrightarrow b)}$

5.

5.1. Seja $g(x) = a(x-h)^2 + k$, sendo $V(h, k)$ as coordenadas do vértice da parábola.

Assim, temos que $h = 1$ e $k = 9$ e, portanto, $g(x) = a(x-1)^2 + 9$.

Como 4 é um zero da função g, então:

$0 = a(4-1)^2 + 9 \Leftrightarrow 0 = 9a + 9 \Leftrightarrow a = -1.$

Portanto, $g(x) = -1(x-1)^2 + 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x) = -1(x^2 - 2x + 1) + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x - 1 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x + 8$$

5.2. $A_{[PQRS]} = \frac{\overline{QR} + \overline{PS}}{2} \times \overline{RS}$

$y_Q = g(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) + 8 = 5$

Logo, $\overline{QR} = 5$.

$P\big(x, g(x)\big)$, $x \in [0, 4[$

$\overline{RS} = |-1| + x = x + 1$

Temos, assim, que $A_{[PQRS]} = \frac{\overline{QR} + \overline{PS}}{2} \times \overline{RS} =$

$$= \frac{5 + g(x)}{2} \times (x+1) \quad , \; x \in [0, 4[$$

$$= \frac{5 + (-x^2 + 2x + 8)}{2} \times (x+1) \quad , \; x \in [0, 4[$$

$$= \frac{-x^2 + 2x + 13}{2} \times (x+1) \quad , \; x \in [0, 4[$$

$$= \frac{-x^3 + x^2 + 15x + 13}{2} \quad , \; x \in [0, 4[$$

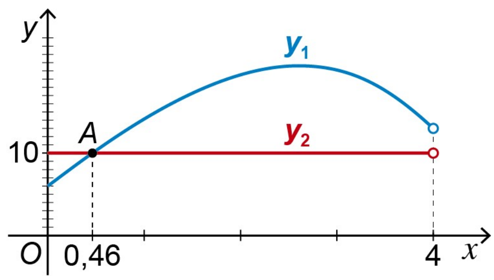
Determinar os valores de x, para os quais a área do trapézio $[PQRS]$ é igual a 10:

$A_{[PQRS]} = 10 \Leftrightarrow \frac{-x^3 + x^2 + 15 \quad + 13}{2} = 10 \quad , \; x \in [0, 4[$

Pretendemos resolver, graficamente, a equação $\frac{-x^3+x^2+15x+13}{2}=10$, em $[0,4[$.

Sejam: $y_1=\frac{-x^3+x^2+15x+13}{2}$

$y_2=10$



Para $x\approx 4{,}6$, a medida da área do trapézio $[PQRS]$ é 10.

6.

6.1. $f(x)=2x^2-8x+1=$

$=2(x^2-4x)+1$

$=2((x-2)^2-2^2)+1$

$=2((x-2)^2-4)+1$

$=2(x-2)^2-8+1$

$=2(x-2)^2-7$

Concluímos, assim, que o vértice tem coordenadas $(2,-7)$.

Alternativa para determinar as coordenadas do vértice:

$f(x)=2x^2-8x+1$

$g(x)=2x^2-8x$

$g(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-8x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(2x-8)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=4$

Abcissa do vértice: $\frac{0+4}{2}=2$

Ordenada do vértice:

$f(2)=2\times 2^2-8\times 2+1=-7$

Como a concavidade é voltada para cima, vem que $D'_f=[-7,+\infty[$.

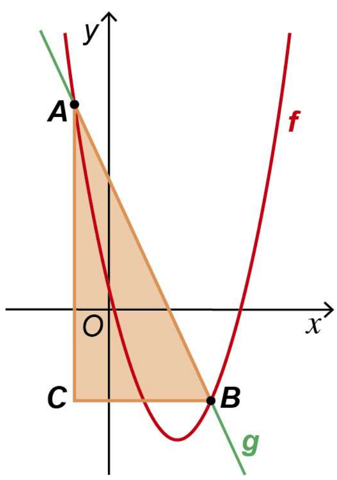
6.2. Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos *A* e *B*, pontos de interseção entre os gráficos das funções f e g.

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x^2-8x+1=-4x+7$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times2\times(-6)}}{2\times2}$

$\Leftrightarrow x=-1\vee x=3$



Sabemos, assim, que $x_A=-1$ e que $x_B=3$.

$y_A=-4\times(-1)+7=11$

$y_B=-4\times 3+7=-5$

Portanto, $A(-1,11)$ e $B(3,-5)$.

Sendo $C(-1,-5)$,

$\overline{AC}=5+11=16$; $\overline{BC}=1+3=4$

Recorrendo ao teorema de Pitágoras:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{AB}^2 = 16^2 + 4^2$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 272 \Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{272}$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$ u. c.

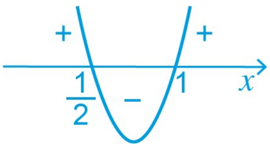
6.3. $f(x) > -5x \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 1 > -5x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0$

Zeros:

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times2\times1}}{2\times2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1$



$S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

7.

7.1. $f_k(x) = \frac{4-(k+2)x}{3} = \frac{4}{3} - \frac{k+2}{3}x$

Para a função afim f_k ser estritamente crescente:

$-\frac{k+2}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{k+2}{3} < 0 \Leftrightarrow k + 2 < 0 \Leftrightarrow k < -2$

Opção (B)

7.2. Para $k = 10$, $f(x) = \frac{4-(10+2)x}{3} = \frac{4}{3} - \frac{12}{3}x = -4x + \frac{4}{3}$

Determinar a abcissa do ponto de interseção entre os gráficos de f e g:

$g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{7}{3} = -4x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

Para os gráficos das funções f e g se intersetarem em exatamente um ponto, a equação $g(x) = f(x)$ tem de ter uma única solução.

$g(x) = f(x)$ é uma equação quadrática e, para uma equação quadrática ter exatamente uma solução, o binómio discriminante tem de ser igual a 0.

Assim: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

A proposição é verdadeira, porque $\Delta = 0$ e, desta forma, a equação tem uma única solução, o que implica que os gráficos das funções f e g se intersetem em exatamente um ponto.