Espiral 10 – Matemática A, 10.º ano

Proposta de resolução [fevereiro – 2025]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ____ - ____ - ____

1.

1.1. Opção (C)

1.2. Opção (B)

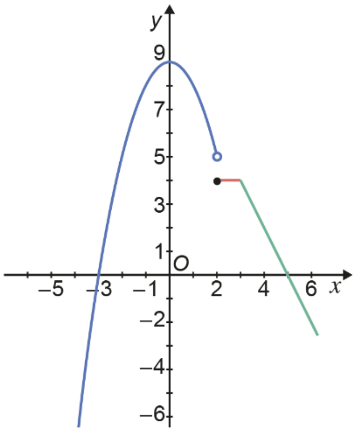
$f(x)=5 \Leftrightarrow \left(9-x^2=5 \wedge -4<x<2\right) \vee \left(4=5 \wedge 2\leq x<3\right) \vee \left(-2x+10=5 \wedge x\geq 3\right)$

- $9-x^2=5 \wedge -4<x<2 \Leftrightarrow x^2=4 \wedge -4<x<2 \Leftrightarrow \left(x=2 \vee x=-2\right) \wedge x\in \left]-4\,,2\right[\Leftrightarrow x=-2$
- $4=5 \wedge 2\leq x<3 \Leftrightarrow x\in\{\ \}$
- $-2x+10=5 \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2} \wedge x\in\left[3\,,+\infty\right[\Leftrightarrow x\in\{\ \}$

Conclusão: $f(x)=5 \Leftrightarrow x=-2$

1.3. Opção (D)

Por observação gráfica:



2.

2.1. Se $x\in\left]-\infty\,,1\right[$, $f(x)=a(x+2)^2-1$. Como $f(1)=3 \Leftrightarrow a=\dfrac{4}{9}$, então $y=\dfrac{4}{9}(x+2)^2-1$

Se $x\in[1,\ 6]$, $f(x)=mx+b$

Como $\begin{cases} f(1)=3 \\ f(6)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3-b \\ 6m+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 18-6b+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ -5b=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ b=4 \end{cases}$

Logo, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{9}(x+2)^2-1 & \text{se} \quad x<1 \\ -x+4 & \text{se} \quad 1\leq x\leq 6 \end{cases}$

2.2. $f(0)=\frac{4}{9}(0+2)^2-1=\frac{16}{9}-\frac{9}{9}=\frac{7}{9}$

As coordenadas do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas são $\left(0\,,\,\frac{7}{9}\right)$

2.3.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}(x+2)^2-1=0 \wedge x<1\right) \vee \left(-x+4=0 \wedge 1\leq x\leq 6\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2=\pm\frac{3}{2} \wedge x<1\right) \vee \left(x=4 \wedge 1\leq x\leq 6\right) \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2} \vee x=-\frac{1}{2} \vee x=4$$

Zeros: $\left\{-\frac{7}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,4\right\}$

2.4. $k\in[-2\,,-1[\,\cup\,]3\,,+\infty[$

3.

3.1.

$$v(x)=\begin{cases} 870+0{,}06x & \text{se} \quad 0\leq x\leq 2100 \\ 870+0{,}06\times 2100+0{,}075\times(x-2100) & \text{se} \quad x>2100 \end{cases}$$

$$v(x)=\begin{cases} 870+0{,}06x & \text{se} \quad 0\leq x\leq 2100 \\ 0{,}075x+838{,}5 & \text{se} \quad x>2100 \end{cases}$$

3.2. $v(1905)=870+0{,}06\times 1905=984{,}30$. Se, num mês, o Raúl efetuar vendas num valor de 1905 €, então o seu salário ilíquido, nesse mês, será $984{,}30$ €.

3.3.

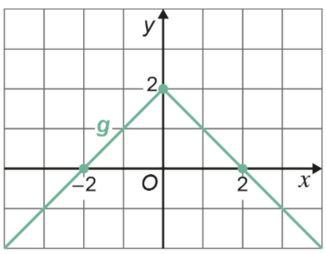
Sabe-se que se o valor das vendas for 2100 €, então $v(2100)=870+0{,}06\times 2100=996$

Então, para termos um salário ilíquido superior a 1200 €, o valor das vendas é dado por:

$$v(x)>1200 \Leftrightarrow 0{,}075x+838{,}5>1200 \Leftrightarrow x>\frac{1200-838{,}5}{0{,}075} \Leftrightarrow x>4820$$

Assim, $k>4820$

4. **Opção (D)**



5.

5.1. $|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se} \quad x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & \text{se} \quad x-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se} \quad x \geq 4 \\ -x+4 & \text{se} \quad x<4 \end{cases}$

$f(x) = -|x-4|+5 = \begin{cases} -(x-4)+5 & \text{se} \quad x \geq 4 \\ -(-x+4)+5 & \text{se} \quad x<4 \end{cases} = \begin{cases} -x+9 & \text{se} \quad x \geq 4 \\ x+1 & \text{se} \quad x<4 \end{cases}$

5.2. $f(x)=6 \Leftrightarrow (-x+9=6 \wedge x \geq 4) \vee (x+1=6 \wedge x<4) \Leftrightarrow \underbrace{(x=3 \wedge x \geq 4)}_{\text{condição impossível}} \vee \underbrace{(x=5 \wedge x<4)}_{\text{condição impossível}} \Leftrightarrow x = \{\ \}$

Conclusão: 6 não pertence ao contradomínio de *f*.

6. **Opção (B)**

$A \cap B = \{(x,y): x<3 \wedge y \geq -2\}$

7. **Opção (C)**

O ponto de coordenadas $(-6, 10)$ pertence à reta $y=-\frac{4}{3}x+2$, pois $10=-\frac{4}{3}\times(-6)+2$

8.

8.1. $N\left(\frac{-4+(-1)}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right)$, ou seja, $N\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

$m = \frac{3-0}{2-\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{3}{\frac{9}{2}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad y=\frac{2}{3}x+b$

Como $N\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ pertence à reta NC, tem-se $0=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{5}{2}\right)+b \Leftrightarrow b=\frac{5}{3}$

Assim, $NC: y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

8.2. Seja P o baricentro do triângulo $[ABC]$. P é o ponto de interseção das retas AM e NC

$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -x-2x=5-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -3x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{3}\times(-1)+\frac{2}{3} \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Assim, $P(-1,1)$

9.

9.1.a) Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AC]$, então $\overline{PA}=\overline{PC}$.

$\overline{PA}=\overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+10x+25+y^2-2y+1 = x^2+4x+4+y^2+6y+9 \Leftrightarrow -2y-6y = 4x-10x+13-26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8y=-6x-13 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{8}$

Assim, $r: y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{8}$

b) $C(-2,-3)$

$r = \overline{CA} = \sqrt{(-2+5)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Logo, a equação reduzida da circunferência é:

$(x-(-2))^2+(y-(-3))^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2 = 25$

9.2. $(x+2)^2+(y+3)^2 \leq 25 \wedge y > \frac{3}{4}x+\frac{13}{8} \wedge y \geq 0$

9.3. Interseção com o eixo Ox:

$(x+2)^2+(y+3)^2 = 25 \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \Leftrightarrow x+2 = \pm 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -6$

Assim, $P(-6,0)$ e $Q(2,0)$. A altura do triângulo $[PQC]$ em relação ao lado $[PQ]$ é igual ao valor absoluto da ordenada do ponto $C(-2,-3)$, ou seja 3.

A área do triângulo $[PQC]$ é dada por: $\frac{\overline{PC}\times 3}{2} = \frac{8\times 3}{2} = 12$.

A medida da área do triângulo $[PQC]$ é 12.

10.