Teste N.º 5 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 - 2x + 3 \geq 0\} = [-3, 1]$

Cálculo auxiliar

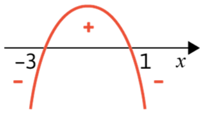
$-x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2-4}{-2} \vee x = \frac{2+4}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$



2.

2.1 O gráfico da função a é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, pelo que a ordenada do vértice da parábola corresponde à altura máxima atingida pelo projétil.

Utilizando a fórmula do vértice de uma parábola, tem-se que:

Abcissa do vértice: $-\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \times (-1)} = 5$

Ordenada do vértice: $a(5) = -5^2 + 10 \times 5 + 11 = -25 + 50 + 11 = 36$

A altura máxima atingida pelo projétil foi 36 metros.

2.2 $a(t) \rightarrow$ distância ao solo do projétil no instante t.

$a(t+2) \rightarrow$ distância ao solo do projétil 2 segundos após o instante t.

$a(t+2) - a(t) \rightarrow$ distância ao solo do projétil durante os 2 segundos.

Uma equação que permite resolver o problema é:

$$a(t+2) - a(t) = 9$$

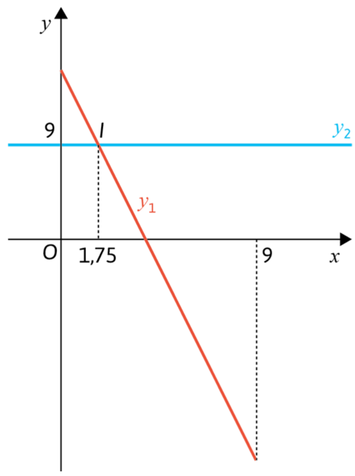
Utilizando x como variável independente:

$$a(x+2) - a(x) = 9$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = a(x+2) - a(x), \quad 0 \leq x \leq 9$

$y_2 = 9$



Assim, o instante, em segundos, arredondado às décimas, a partir do qual, durante 2 segundos, a distância desse projétil ao solo aumenta 9 metros é $1{,}8$.

3. Opção (C)

O ponto P é o transformado do ponto de coordenadas $(-1, 3)$ por uma meia-volta de centro O, pelo que as suas coordenadas são $(1, -3)$. Assim:

$k^2 - 4k + 4 = 1 \wedge -6k^2 + 3 = -3 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \wedge -6k^2 = -6$

$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \wedge k^2 = 1$

$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm 2}{2} \wedge k^2 = 1$

$\Leftrightarrow (k = 1 \vee k = 3) \wedge (k = -1 \vee k = 1)$

$\Leftrightarrow k = 1$

4. **I** – b); **II** – b); **III** – c); **IV** – a)

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

As coordenadas de M são $\left(\frac{2+(-6)}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-2, 1)$.

$\overline{AB} = \sqrt{\left(-6-(-2)\right)^2 + \left(3-(-1)\right)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

O ponto A pertence à reta definida por $y = \frac{x}{2}$, pois $-1 = \frac{-2}{2}$.

O ponto B tem coordenadas $(-6, 3)$, pelo que obedece à condição $y \geq x$.

5.

5.1 O circuncentro do triângulo $[ABC]$, ponto de interseção das mediatrizes de $[AB]$, de $[AC]$ e de $[BC]$, é o centro da circunferência.

Para determinar as suas coordenadas, podemos determinar a interseção das mediatrizes de $[AB]$ e de $[AC]$, por exemplo.

Seja $P(x, y)$ um qualquer ponto pertencente à mediatriz de $[AB]$.

Então, $d(A, P) = d(B, P)$, pelo que:

$$\sqrt{\left(x-(-8)\right)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4$$
$$\Leftrightarrow 16x + 64 - 12y + 36 = -8x + 16 - 4y + 4$$
$$\Leftrightarrow -8y = -24x - 80$$
$$\Leftrightarrow y = 3x + 10$$

Assim, a reta de equação $y = 3x + 10$ é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um qualquer ponto pertencente à mediatriz de $[AC]$.

Então, $d(A, P) = d(C, P)$, pelo que:

$$\sqrt{\left(x-(-8)\right)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{\left(x-(-4)\right)^2 + \left(y-(-6)\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 12y + 36 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 12y + 36$$
$$\Leftrightarrow 16x + 64 - 12y + 36 = 8x + 16 + 12y + 36$$
$$\Leftrightarrow -24y = -8x - 48$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{3} + 2$$

Assim, a reta de equação $y = \frac{x}{3} + 2$ é a mediatriz de $[AC]$.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto de interseção das retas mediatrizes de $[AB]$ e de $[AC]$.

Assim:

$$\begin{cases} y = 3x + 10 \\ y = \frac{x}{3} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} + 2 = 3x + 10 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = 9x + 30 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x = 24 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{-3}{3} + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\therefore (-3, 1)$

O circuncentro do triângulo $[ABC]$, de coordenadas $(-3, 1)$, é o centro da circunferência.

Seja r a medida do raio da circunferência $\mathcal{C}$:

$r = \overline{AC} = \sqrt{(-3-(-8))^2 + (1-6)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$(x-(-3))^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 50$

Assim, a equação $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 50$ define a circunferência $\mathcal{C}$.

5.2 Comecemos por determinar a equação reduzida da reta BC.

Seja m o seu declive: $m = \frac{-6-2}{-4-4} = \frac{-8}{-8} = 1$

A equação reduzida da reta BC é da forma $y = x + b$.

Como o ponto B, de coordenadas $(4, 2)$, pertence à reta, então:

$2 = 4 + b \Leftrightarrow b = -2$

Logo, a equação reduzida da reta BC é $y = x - 2$.

Assim, uma condição que define a região representada a sombreado, incluindo a fronteira, é:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 \leq 50 \wedge y \leq x - 2 \wedge y \leq 0$$

5.3 **<u>1.º processo</u>**

Comecemos por determinar as coordenadas do ponto D.

Sabemos que $[DB]$ é um diâmetro da circunferência $\mathcal{C}$, pelo que o centro da circunferência é o ponto médio de $[DB]$.

$\left(\frac{x_D+4}{2}, \frac{y_D+2}{2}\right) = (-3, 1)$, de onde resulta que:

$\frac{x_D+4}{2} = -3 \ \wedge \ \frac{y_D+2}{2} = 1 \Leftrightarrow x_D = -10 \ \wedge \ y_D = 0$

O ponto D tem, assim, coordenadas $(-10, 0)$.

O triângulo $[ADB]$ é retângulo em A, uma vez que está inscrito numa semicircunferência.

Determinemos $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$:

$\overline{AD} = \sqrt{(-10-(-8))^2 + (0-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

$\overline{AB} = \sqrt{(4-(-8))^2 + (2-6)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$

$$A_{[ADB]} = \frac{\sqrt{40} \times \sqrt{160}}{2} = \frac{\sqrt{6400}}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

O valor da área do triângulo $[ADB]$ é 40 u.a.

2.º processo

Sabemos que o triângulo $[ADB]$ é retângulo em A, uma vez que está inscrito numa semicircunferência, pelo que $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2$.

$\overline{AB} = \sqrt{(4-(-8))^2 + (2-6)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$

$\overline{DB} = 2 \times \sqrt{50}$

Assim:

$$\left(\sqrt{160}\right)^2 + \overline{AD}^2 = \left(2 \times \sqrt{50}\right)^2 \Leftrightarrow 160 + \overline{AD}^2 = 200$$
$$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 40$$
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\overline{AD}>0} \overline{AD} = \sqrt{40}$$

$$A_{[ADB]} = \frac{\sqrt{40} \times \sqrt{160}}{2} = \frac{\sqrt{6400}}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

O valor da área do triângulo $[ADB]$ é 40 u.a.

6. Opção (D)

Através da equação vetorial da reta r: $(x, y) = (-2,1) + k(2, -4), k \in \mathbb{R}$, sabemos que o vetor de coordenadas $(2, -4)$ é um vetor diretor da reta, logo $\frac{-4}{2} = -2$ é o declive da reta.

A equação reduzida da reta r é da forma $y = -2x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(-2, 1)$ pertence à reta, então:

$1 = -2 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -3$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = -2x - 3$.

7.

7.1 Opção (D)

A reta CD é perpendicular ao plano yOz e interseta o plano yOz no ponto C, de coordenadas $(0, 0, 3)$, logo $y = 0 \wedge z = 3$ é uma condição que define a reta CD.

7.2 De acordo com as informações dadas no enunciado, como o ponto D pertence ao plano xOz as suas coordenadas são do tipo $(x, 0, z)$, e como o ponto G pertence ao plano yOz as suas coordenadas são do tipo $(0, y, z)$.

Ambos os pontos pertencem à reta DG.

Determinemos, assim, as coordenadas dos pontos D e G, recorrendo à equação vetorial da reta DG.

Comecemos por determinar as coordenadas do ponto D:

$(x, 0, z) = (-5, 14, 5) + k(5, -7, -1), k \in \mathbb{R}$

$$(x, 0, z) = (-5 + 5k, 14 - 7k, 5 - k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 5k \\ 0 = 14 - 7k \\ z = 5 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 5 \times 2 \\ k = 2 \\ z = 5 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ k = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

D tem coordenadas $(5, 0, 3)$.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto G :

$(0, y, z) = (-5, 14, 5) + k(5, -7, -1), k \in \mathbb{R}$

$$(0, y, z) = (-5 + 5k, 14 - 7k, 5 - k) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -5 + 5k \\ y = 14 - 7k \\ z = 5 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 14 - 7 \times 1 \\ z = 5 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 7 \\ z = 4 \end{cases}$$

G tem coordenadas $(0, 7, 4)$.

7.3 Seja $P(x, y, z)$ um qualquer ponto pertencente ao plano mediador de $[DG]$.

Então, $d(D, P) = d(G, P)$, pelo que:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-7)^2 + (z-4)^2}$$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 - 14y + 49 + z^2 - 8z + 16$

$\Leftrightarrow -10x + 25 - 6z + 9 = 14y + 49 - 8z + 16$

$\Leftrightarrow -10x + 14y + 2z - 31 = 0$

7.4 A equação cartesiana reduzida da superfície esférica de centro no ponto D e que é tangente ao plano $x = 0$ é:

$(x-5)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$

Comecemos por determinar a interseção desta superfície esférica com o plano xOy, definido por $z = 0$:

$(x-5)^2 + y^2 + (0-3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 16$

Conclui-se, assim, que a interseção da superfície esférica com o plano xOy é uma circunferência de raio 4 cujo perímetro é 8π.