Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Número total de votos: $210 \div 0{,}25 = 840$

Percentagem de sócios que compareceram para votar: $100\% - 30\% = 70\%$

Número total de sócios do clube desportivo: $840 \div 0{,}70 = 1200$

Número de sócios do clube que não compareceram para votar neste ato eleitoral: $1200 - 840 = 360$

2. I – c); **II** – a); **III** – a); **IV** – b)

De acordo com o gráfico apresentado, tem-se que:

Número de países visitados	Número de alunos
0	$0{,}05 \times 20 = 1$
1	$0{,}10 \times 20 = 2$
3	$0{,}10 \times 20 = 2$
4	$0{,}15 \times 20 = 3$
6	$0{,}20 \times 20 = 4$
7	$0{,}25 \times 20 = 5$
8	$0{,}15 \times 20 = 3$

Conclui-se que, dos 20 alunos da turma, 5 (1 + 2 + 2) visitaram menos de quatro países. Assim, **I** – c).

Inserindo na calculadora gráfica as listas ao lado apresentadas, e recorrendo às suas potencialidades, obtém-se:

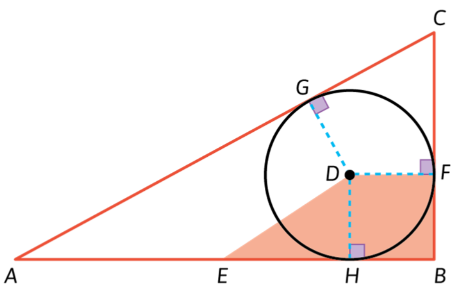
- a mediana da distribuição do número de países visitados é 6, logo **II** – a);
- o número médio de países visitados é $5{,}15$ e o desvio-padrão desta distribuição, arredondado às décimas, é $2{,}5$ países.

Portanto, **III** – a) e **IV** – b).

Lista 1	Lista 2
0	1
1	2
3	2
4	3
6	4
7	5
8	3

3. Sejam G e H pontos pertencentes aos lados $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente.

Uma vez que se sabe que a circunferência está inscrita no triângulo $[ABC]$, podemos garantir que os segmentos de reta $[DF]$, $[DG]$ e $[DH]$ são raios da circunferência, perpendiculares aos lados do triângulo.



$[ABC]$ é retângulo em B, pelo que, pelo teorema de Pitágoras, se tem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 15^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 225 + 64$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 289$$

$\overline{AC} > 0$, logo $\overline{AC} = 17$.

Seja r a medida do raio da circunferência.

$$A_{[ABC]} = A_{[ABD]} + A_{[BCD]} + A_{[ACD]} \Leftrightarrow \frac{15\times 8}{2} = \frac{15\times r}{2} + \frac{8\times r}{2} + \frac{17\times r}{2}$$

$$\Leftrightarrow 120 = 15 \times r + 8 \times r + 17 \times r$$

$$\Leftrightarrow 120 = 40 \times r$$

$$\Leftrightarrow r = 3$$

Assim, $A_{[EBFD]} = \frac{\frac{15}{2}+3}{2} \times 3 = \frac{21}{2}$ u.a.

4. Uma vez que M_1 e M_2 são os pontos médios de $[AB]$ e de $[BC]$, respetivamente, podemos concluir que $[AM_1]$ e $[CM_2]$ são duas medianas do triângulo $[ABC]$ e que o ponto D é o baricentro do triângulo. Assim, $\overline{AD} = 2\overline{DM_2}$ e $\overline{CD} = 2\overline{DM_1}$.

Uma vez que $[AM_2]$ e $[CM_1]$ são perpendiculares, estamos em condições de aplicar o teorema de Pitágoras aos triângulos $[ADM_1]$ e $[CDM_2]$:

$$\begin{cases} \overline{AM_1}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DM_1}^2 \\ \overline{CM_2}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DM_2}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 = (2\overline{DM_2})^2 + \overline{DM_1}^2 \\ \left(\frac{9}{2}\right)^2 = (2\overline{DM_1})^2 + \overline{DM_2}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 4\overline{DM_2}^2 + \overline{DM_1}^2 \\ \frac{81}{4} = 4\overline{DM_1}^2 + \overline{DM_2}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DM_1}^2 = 9 - 4\overline{DM_2}^2 \\ \frac{81}{4} = 4\left(9 - 4\overline{DM_2}^2\right) + \overline{DM_2}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DM_1}^2 = 9 - 4\overline{DM_2}^2 \\ \frac{81}{4} = 36 - 16\overline{DM_2}^2 + \overline{DM_2}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DM_1}^2 = 9 - 4\overline{DM_2}^2 \\ 15\overline{DM_2}^2 = 36 - \frac{81}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DM_1}^2 = 9 - 4 \times \frac{63}{60} \\ \overline{DM_2}^2 = \frac{63}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DM_1}^2 = \frac{24}{5} \\ \overline{DM_2}^2 = \frac{21}{20} \end{cases}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (2\overline{DM_2})^2 + (2\overline{DM_1})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4 \times \left(\overline{DM_2}^2 + \overline{DM_2}^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4 \times \left(\frac{21}{20} + \frac{24}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{117}{5}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 23{,}4$$

5. Opção (B)

Sabemos que o raio da circunferência dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$. D é o circuncentro do triângulo $[ABC]$ e $\overline{DB} = 8$, logo o raio da circunferência dos nove pontos tem medida igual a 4.

O valor da área da região sombreada da figura é $\pi \times 8^2 - \pi \times 4^2 = 48\pi$ u.a.

6. Opção (D)

f é decrescente, logo:

$6 - 2k < 0 \Leftrightarrow -2k < -6$

$\Leftrightarrow k > 3$

A ordenada na origem da reta que representa graficamente a função f é -9, logo:

$k^2 - 25 = -9 \Leftrightarrow k^2 = 16$

$\Leftrightarrow k = -4 \lor k = 4$

Assim, o valor de k que respeita as condições do enunciado é 4 .

7.

7.1 Uma vez que a função quadrática f tem máximo em $x = 2$, e que o seu contradomínio é o intervalo $]-\infty, 8]$, podemos concluir que as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função f são $(2, 8)$.

Assim, a função f pode ser definida por uma expressão analítica do tipo $f(x) = a(x-2)^2 + 8$.

O ponto A tem abcissa nula e é o ponto de interseção dos gráficos das funções f e g.

Determinemos a ordenada do ponto A: $g(0) = 0 + 4 = 4$

O ponto A tem coordenadas $(0, 4)$ e pertence ao gráfico de f, pelo que:

$f(0) = 4 \Leftrightarrow a(0-2)^2 + 8 = 4$

$\Leftrightarrow 4a = -4$

$\Leftrightarrow a = -1$

Logo, uma expressão analítica que define a função f é:

$f(x) = -(x-2)^2 + 8 =$

$= -(x^2 - 4x + 4) + 8 =$

$= -x^2 + 4x + 4$

7.2 A e B são os pontos de interseção dos gráficos das funções f e g, pelo que, para determinar as coordenadas do ponto B, temos de resolver a equação $f(x) = g(x)$.

Assim:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 4 = x + 4$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(-x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \lor -x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 3$

A tem abcissa 0, pelo que a abcissa do ponto B terá de ser 3.

Para determinar a sua ordenada, basta calcular $g(3) = 3 + 4 = 7$.

Assim, o ponto B tem coordenadas $(3, 7)$.

8.

8.1 Opção (A)

Para que os gráficos das funções f e g se intersetem num único ponto, a equação $f(x)=g(x)$ tem de ter exatamente uma solução.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-8x+6=ax+2$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x-ax+4=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-(8+a)x+4=0$$

Para que a equação $x^2-(8+a)x+4=0$ tenha exatamente uma solução, o binómio discriminante desta equação terá de ser igual a zero:

$$\triangle=0 \Leftrightarrow \left(-(8+a)\right)^2-4\times 1\times 4=0$$
$$\Leftrightarrow (8+a)^2=16$$
$$\Leftrightarrow 8+a=-4 \;\vee\; 8+a=4$$
$$\Leftrightarrow a=-12 \;\vee\; a=-4$$

Assim, de acordo com as opções dadas no enunciado, um valor de a para o qual os gráficos das funções f e g se intersetam num só ponto é -4.

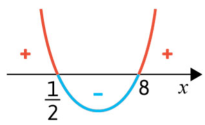
8.2 $f(x)\geq g(x)-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2-8x+6\geq x+2-\frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{17x}{2}+4\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-17x+8\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{2} \vee x\geq 8$$

C.S. = $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[8,+\infty[$

Cálculo auxiliar

$$2x^2-17x+8=0 \Leftrightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\times 2\times 8}}{2\times 2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{225}}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{17\pm 15}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{17-15}{4} \vee x=\frac{17+15}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{4} \vee x=\frac{32}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=8$$



9.

9.1 $D_g=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq 0 \wedge x+3\neq 0\}$

$D_g=[-6,-3[\,\cup\,]-3,6]$

Cálculo auxiliar

$x+3=0\Leftrightarrow x=-3$

9.2 Se $x<0$, o gráfico da função f é uma parábola cujo vértice tem coordenadas $(-3,9)$ e em que um dos zeros é o ponto de coordenadas $(-6,0)$. Assim:

$$f(x)=a\left(x-(-3)\right)^2+9=a(x+3)^2+9$$
$$f(-6)=0\Leftrightarrow a(-6+3)^2+9=0$$
$$\Leftrightarrow 9a=-9$$
$$\Leftrightarrow a=-1$$

Logo, $f(x)=-(x+3)^2+9=-(x^2+6x+9)+9=-x^2-6x$, se $x\in\,]-\infty,0[$.

Se $0\leq x<3$, a função é constante.

Logo, $f(x)=4$ se $x\in[0,3[$.

Se $x \geq 3$, o gráfico da função f é uma reta que contém os pontos de coordenadas $(3, 4)$ e $(6, 0)$.

O declive da reta é $\frac{0-4}{6-3} = -\frac{4}{3}$.

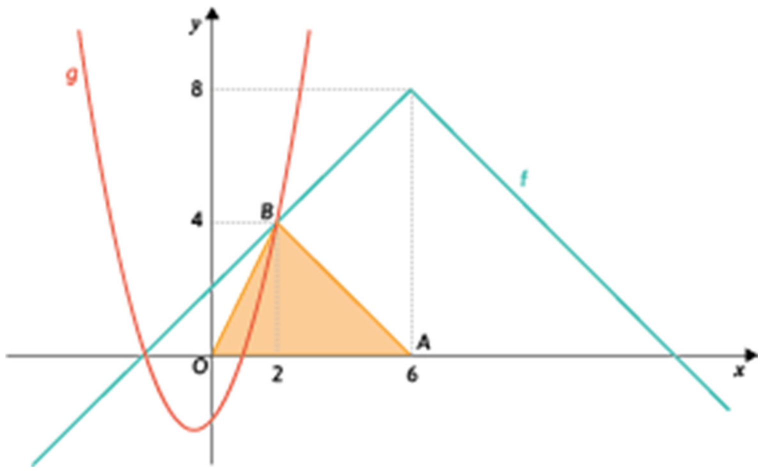
$f(6) = 0$, logo $-\frac{4}{3} \times 6 + b = 0 \Leftrightarrow b = 8$.

Desta forma, $f(x) = -\frac{4}{3}x + 8$, se $x \in [3, +\infty[$.

Assim:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x & \text{se} & x < 0 \\ 4 & \text{se} & 0 \leq x < 3 \\ -\dfrac{4}{3}x + 8 & \text{se} & x \geq 3 \end{cases}$$

10.



$A_{[ABC]} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$ u.a.