Teste N.º 3 – Proposta de resolução

1. **I** – b); **II** – c); **III** – b); **IV** – a)

Aplicando o método de Borda, sem considerar o voto do Diogo, isto é, apenas com os dados da tabela, temos os pontos obtidos por cada um dos três candidatos voluntários:

Ana: $5 \times 2 + 4 \times 1 + 3 \times 3 + 2 \times 2 = 27$

Bernardo: $5 \times 1 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 3 = 29$

Cláudia: $5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 1 = 28$

Desta forma, podemos concluir que:

Antes de contabilizar o voto do Diogo, o candidato que estava em primeiro lugar tinha **29** pontos e o candidato **C** estava em segundo lugar.

Determinemos, agora, o número de pontos que obteria cada um dos candidatos, considerando cada uma das 6 possibilidades de ordenação de preferências realizada pelo Diogo:

1.ª preferência	A	A	B
2.ª preferência	B	C	A
3.ª preferência	C	B	C
Pontuação obtida	A: 27 + 3 = 30 pontos B: 29 + 2 = 31 pontos C: 28 + 1 = 29 pontos	A: 27 + 3 = 30 pontos B: 29 + 1 = 30 pontos C: 28 + 2 = 30 pontos	A: 27 + 2 = 29 pontos B: 29 + 3 = 32 pontos C: 28 + 1 = 29 pontos
1.ª preferência	B	C	C
2.ª preferência	C	A	B
3.ª preferência	A	B	A
Pontuação obtida	A: 27 + 1 = 28 pontos B: 29 + 3 = 32 pontos C: 28 + 2 = 30 pontos	A: 27 + 2 = 29 pontos B: 29 + 1 = 30 pontos C: 28 + 3 = 31 pontos	A: 27 + 1 = 28 pontos B: 29 + 2 = 31 pontos C: 28 + 3 = 31 pontos

Uma vez que se sabe que não houve candidatos com o mesmo número de pontos, e que a Cláudia foi a escolhida para coordenadora do evento, a única possibilidade de ordenação para o voto do Diogo é C – A – B, a que corresponde uma pontuação total de 31 pontos para a Cláudia, 30 pontos para o Bernardo e 29 pontos para a Ana.

Assim:

Depois de contabilizados os 15 votos, o candidato vencedor obteve **31** pontos.

Na lista de preferências do Diogo, o candidato **A** estava na segunda preferência.

2. Dividindo o número de votos em cada lista por 1, 3, 5 e 7, obtemos os seguintes quocientes.

	Lista		
Divisores	**A**	**B**	**C**
1	564	412	396
3	188	137,33	132
5	112,80	82,40	79,20
7	80,57	58,86	56,57

Escrevendo os quocientes obtidos por ordem decrescente:

Quociente	564	412	396	188	137,33	132	112,80	82,40
Lista	A	B	C	A	B	C	A	B

Conclui-se, assim, que o número de elementos de cada lista que irá constituir a direção de moradores é:

- Lista A: 3
- Lista B: 3
- Lista C: 2

3. Seja x a quantia, em euros, depositada no banco quando o Rodrigo nasceu:

$$x \times \left(1+\frac{0{,}016}{12}\right)^{18\times 12} = x + 1668 \Leftrightarrow x \times \left(\frac{751}{750}\right)^{216} - x = 1668$$

$$\Leftrightarrow x \times \left(\left(\frac{751}{750}\right)^{216} - 1\right) = 1668$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1668}{\left(\frac{751}{750}\right)^{216} - 1}$$

Assim, $x \approx 5001$ €.

4. **I** – a); **II** – b); **III** – c); **IV** – c)

Comecemos por inserir na calculadora gráfica as listas com os dados referentes às idades dos atletas praticantes de atletismo apresentados:

Lista 1	**Lista 2**
20	2
21	2
23	3
25	2
27	2
30	1

De seguida, recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, temos que o valor da média é 23,75, a mediana é 23 e a dispersão, arredondada às unidades, relativamente à média, é 3.

A percentagem de atletas com, no máximo, 25 anos é igual a $\frac{2+2+3+2}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75 = 75\%$.

Desta forma, podemos concluir que:

A média das idades dos atletas que praticam voleibol é **inferior** à idade média dos atletas que praticam atletismo, e a mediana das suas idades é **igual** à mediana das idades dos atletas que praticam atletismo. Relativamente às idades dos atletas que praticam voleibol, o desvio-padrão arredondado às unidades, relativamente à média das suas idades, é **3** e a percentagem de atletas com, no máximo, 25 anos é $\mathbf{75}\%$.

5. Opção (B)

Considerando a informação que é dada no enunciado, podemos concluir que o ponto I corresponde ao ponto de interseção das três medianas do triângulo, que se designa por baricentro.

Uma vez que as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes, e sabendo que o triângulo $[ABC]$ tem área igual a 72 cm^2, podemos concluir que o valor da área do triângulo $[AIC]$ é igual a $\frac{2}{6} \times 72 = 24$ cm^2.

6. $[ABC]$ é um triângulo isósceles, pois $\overline{AB} = \overline{BC}$.

M é o ponto médio de $[AC]$, logo pertence à mediana do triângulo $[ABC]$, com origem no vértice em B.

I é o incentro do triângulo $[ABC]$, isto é, é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.

Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é isósceles, não equilátero, os quatro pontos notáveis são colineares. Desta forma, podemos garantir que $\dot{B}M$, bissetriz do ângulo ABC, passa pelo ponto I e pelo ponto M, e ainda que $[BM]$ é uma altura do triângulo. Assim:

$$\begin{aligned} \overline{BM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{BC}^2 &\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 13^2 - 12^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 169 - 144 \\ &\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 25 \end{aligned}$$

Logo, $\overline{BM} = 5$.

Seja *r* a medida do raio da circunferência inscrita ao triângulo $[ABC]$.

Uma vez que *I* é o incentro do triângulo, a medida da altura do triângulo $[AIC]$, bem como a medida da altura do triângulo $[ABI]$ é r.

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} = A_{[AIC]} + 2 \times A_{[ABI]} &\Leftrightarrow \frac{24\times 5}{2} = \frac{24\times r}{2} + 2 \times \frac{13\times r}{2} \\ &\Leftrightarrow 60 = 12r + 13r \\ &\Leftrightarrow r = \frac{60}{25} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\overline{MI}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{IC}^2 \Leftrightarrow r^2 + \overline{MC}^2 = \overline{IC}^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 + 12^2 = \overline{IC}^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{IC}^2 = \frac{3744}{25}$$

Assim, o valor da área pedida é $A = \frac{3744}{25}\pi$ u.a.

7. Opção (C)

Atendendo a todos os dados do enunciado, podemos assumir que a reta r corresponde à reta de Euler, uma vez que passa pelo ortocentro (ponto D), pelo baricentro (ponto E) e pelo circuncentro (ponto F) do triângulo não equilátero $[ABC]$.

Uma vez que a distância do ponto D ao ponto E é o dobro da distância do ponto E ao ponto F, e como $\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF}$, tem-se que:

$$96 = 2\overline{EF} + \overline{EF} \Leftrightarrow 3\overline{EF} = 96$$
$$\Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{96}{3}$$
$$\Leftrightarrow \overline{EF} = 32$$

Portanto, $\overline{DE} = 32 \times 2 = 64$.

8. O ponto I é o ponto de interseção das mediatrizes de dois lados do triângulo $[ABC]$, logo é equidistante de cada um dos seus vértices, isto é, $\overline{AI} = \overline{BI} = \overline{CI}$.

$$\overline{AI} + 2\overline{BI} + 3\overline{CI} = 48 \Leftrightarrow 6\overline{AI} = 48$$
$$\Leftrightarrow \overline{AI} = 8$$

Tem-se que o raio da circunferência (r) dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$, pelo que $r = 8 \div 2 = 4$.

Desta forma, o perímetro da circunferência dos nove pontos, relativamente ao triângulo $[ABC]$, é igual a $2\pi \times 4 = 8\pi$ u.c.

9.

9.1 $D_f =]-\infty, 3[\cup]3, 5]$; $D'_f = [-5, +\infty[$

9.2 f é estritamente decrescente em $]-\infty, -7]$, em $[-5, 0]$ e em $[2, 3[$.

f é estritamente crescente em $[-7, -5]$, em $[0, 2]$ e em $]3, 5]$.

-5 é um mínimo absoluto e 0 é um minimizante.

-2 é um mínimo relativo e -7 é um minimizante.

$0, -1$ e 2 são máximos relativos e $-5, 2$ e 5 são os respetivos maximizantes.

9.3 $\left(f(x) - f(2)\right)^2 = -2f(1) - 3 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 - 2f(x)f(2) + \left(f(2)\right)^2 = -2f(1) - 3$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 + 2f(x) + (-1)^2 = -2(-2) - 3$$
$$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 + 2f(x) = 4 - 3 - 1$$
$$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 + 2f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)(f(x)+2)=0$$
$$\Leftrightarrow f(x)=0 \lor f(x)+2=0$$
$$\Leftrightarrow f(x)=0 \lor f(x)=-2$$
$$\Leftrightarrow x=-8 \lor x=-5 \lor x=4 \lor x=-7 \lor x=-3 \lor x=1$$

C.S. = $\{-8,-7,-5-3,1,4\}$

10.

10.1 Opção (D)

$$R(0)=\frac{2000+4000\times 0^2}{1-0{,}08\times 0+0{,}003\times 0^2}=2000$$

$$R(1)=\frac{2000+4000\times 1^2}{1-0{,}08\times 1+0{,}003\times 1^2}\approx 6501$$

$$\frac{R(1)-R(0)}{R(0)}\times 100=\frac{6501-2000}{2000}\times 100\approx 225\%$$

10.2 $R(t+4)=3R(t), 0\leq t\leq 8$

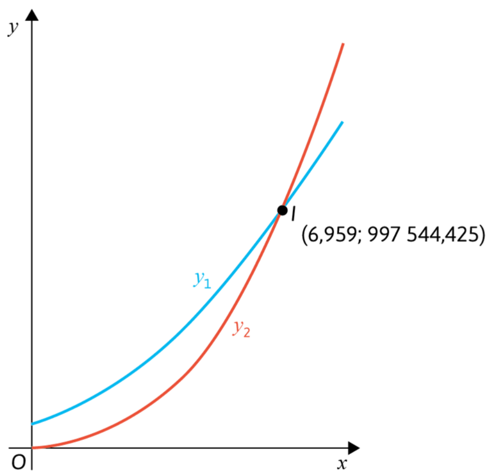
Utilizando x como variável independente:

$$\frac{2000+4000(x+4)^2}{1-0{,}08(x+4)+0{,}003(x+4)^2}=3\times\frac{2000+4000x^2}{1-0{,}08x+0{,}003x^2}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$y_1=\frac{2000+4000(x+4)^2}{1-0{,}08(x+4)+0{,}003(x+4)^2}\ ,\ 0\leq x\leq 8$$

$$y_2=3\times\frac{2000+4000x^2}{1-0{,}08x+0{,}003x^2}$$



$0{,}959\times 365\approx 350$

O instante a partir do qual, passados quatro anos, o número de pessoas que utilizam fontes de energia renovável triplica corresponde a 6 anos e 350 dias, após o início de 2012.