Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seis alunos, entre os quais estão a Ana e o Bruno, colocam-se em fila para serem atendidos na cantina, um de cada vez.
De quantas maneiras se podem colocar em fila de modo que a Ana seja atendida antes do Bruno?

(A) 120 **(B)** 240

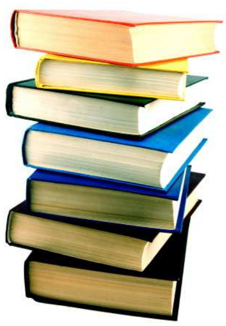
(C) 360 **(D)** 480

2. Considere todas as palavras de seis letras, com ou sem significado, que se podem formar trocando a ordem a letras da palavra ***RESOLVER***.
Escolhendo, ao acaso, uma dessas palavras, determine, na forma de fração irredutível, a probabilidade de a primeira e a última letra dessa palavra:

2.1. serem a letra ***R***;

2.2. serem letras diferentes.

3. A Ana, o Bruno e o Carlos requisitaram sete livros diferentes na biblioteca da escola para consultarem no próximo fim de semana, tendo em vista um trabalho de grupo em que estão a trabalhar.
De quantas maneiras poderão distribuir entre si os livros requisitados, sabendo que cada um levará para o fim de semana pelo menos dois desses livros?



(A) 630 **(B)** 210

(C) 105 **(D)** 35

4. Tendo em vista a renovação dos quadros, o departamento de recursos humanos de uma empresa concluiu que:

- o número de trabalhadores que se encontram em condições de pré-reforma é igual a metade do número de homens que trabalham na empresa;
- seis em cada dez trabalhadores da empresa em condições de pré-reforma são homens;
- 75% das mulheres que trabalham na empresa **não** estão em condições de pré-reforma.

4.1. Mostre que em cada 18 trabalhadores da empresa, cinco estão em condições de pré-reforma.

4.2. Se a empresa tem 540 trabalhadores, quantos destes são mulheres?

5. Uma caixa 1 contém várias bolas numeradas.
Uma caixa 2 contém 31 bolas numeradas com números pares e algumas bolas numeradas com números ímpares.

Considere a experiência que consiste em tirar simultaneamente e ao acaso duas bolas da caixa 1, colocá-las na caixa 2 e, em seguida, tirar, também ao acaso, uma bola da caixa 2.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : "A soma dos números das bolas tiradas da caixa 1 é um número ímpar"

B : "A bola retirada da caixa 2 tem um número ímpar"

Sabendo que $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$, o número de bolas com número ímpar que inicialmente estavam na caixa 2 é:

(A) 18 **(B)** 15

(C) 12 **(D)** 9

6. Considere um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

6.1. Lança-se o dado quatro vezes seguidas e em cada lançamento regista-se o algarismo da face que fica voltada para cima formando assim um número de quatro algarismos.

Qual é a probabilidade de o número assim formado ser par e maior do que 5000?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

6.2. O João vai pintar as faces do dado da seguinte forma:

- quatro ou cinco faces são pintadas de azul;
- as restantes faces são pintadas de vermelho;
- os números inscritos nas faces ficam pintados de branco.

De quantas maneiras pode ser pintado o dado?

(A) 1080 **(B)** 144

(C) 90 **(D)** 21

7. Sabe-se que, num grupo de 18 professores de uma Escola Secundária, 12 lecionam Física e 10 lecionam Química.

7.1. Nesse grupo são escolhidos, ao acaso, dois professores.
Em qual das seguintes opções se apresenta, na forma de percentagem com arredondamento às unidades, a probabilidade de os professores escolhidos lecionarem a mesma disciplina?

(A) 4% **(B)** 59%

(C) 69% **(D)** 73%

7.2. Pretende-se formar uma comissão de cinco professores escolhidos entre os 18 elementos desse grupo para analisarem os novos programas das disciplinas que lecionam.
De quantas maneiras pode ser formada a comissão de forma que dela faça parte pelo menos um professor que lecione as duas disciplinas?

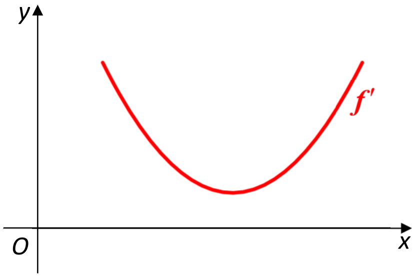
8. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos possíveis $(A, B \in \mathcal{P}(E))$

Sabe-se que $P\left(\overline{B} \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P\left(\overline{B}\right) + P(A \cap B)$

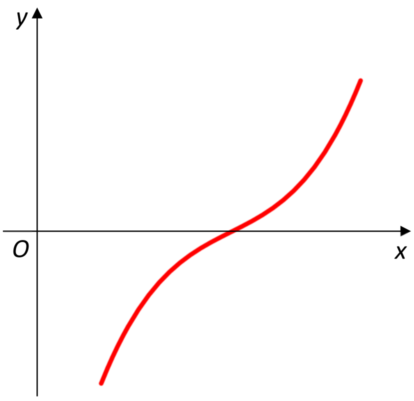
Qual é o valor de $P(A \mid B)$?

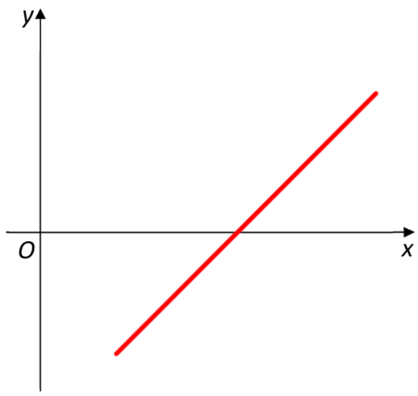
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

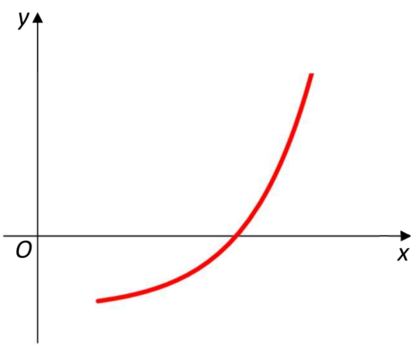
9. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f', derivada de f, ambas de domínio $\mathbb{R}$.

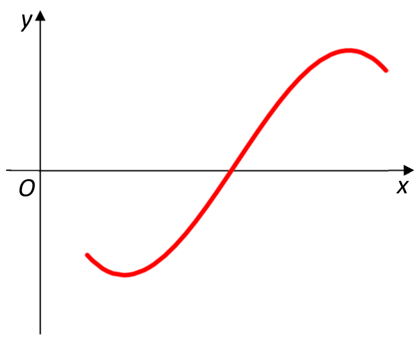


Qual das seguintes figuras pode representar parte do gráfico da função f?

(A)


(B)


(C)


(D)


10. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja **derivada**, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

10.1. Para determinado valor real de k a reta r, de equação $y=2x+k$, é tangente ao gráfico da função f num ponto de ordenada 5.

Determine o valor de k.

10.2. Estude a função f quanto ao sentido da concavidade do gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico tema concavidade voltada para cima;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico tema concavidade voltada para baixo;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

11. Mostre que o gráfico de uma função polinomial do terceiro grau tem um e um só ponto de inflexão.

FIM

Cotações:

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	
10	15	15	10	15	15	10	10	10	10	15	10	10	15	15	15	**200**

Proposta de resolução

1. Os seis alunos podem ordenar-se numa fila de $6!$ maneiras diferentes. Em metade dos casos a Ana fica à frente do Bruno.

Logo, o número pedido é $\frac{6!}{2} = 360$.

Resposta: **(C)**

2. Número de casos possíveis: ***R E*** *S O L V* ***E R***

$$\frac{8!}{2! \times 2!} = 10\,080 \quad \text{ou} \quad {}^8C_2 \times {}^6C_2 \times 4! = 28 \times 15 \times 24 = 10\,080$$

2.1. *R* ***E*** *S O L V* ***E*** *R*

Número de casos favoráveis:

$\frac{6!}{2!} = 360$ (Fixando as letras R no início e no fim sobram seis letras sendo duas repetidas)

A probabilidade pedida é:

$$P = \frac{360}{10\,080} = \frac{1}{28}$$

2.2. Apenas as letras R e E se podem repetir no início e no fim da palavra.

Atendendo à alínea anterior, o número de casos favoráveis ao **acontecimento contrário** é

$2 \times 360 = 720$ (há tantas palavras com a letra R repetida, no início e no fim, como com a letra E)

A probabilidade pedida é:

$$P = 1 - \frac{720}{10\,080} = \frac{13}{14}$$

3. Se cada um leva pelo menos dois livros então um deles leva três livros e os outros levam dois livros cada um:

$${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 \times 3 = 630$$

Número de maneiras de escolher o estudante que leva três livros

Número de maneiras de escolher o primeiro conjunto de dois livros

Número de maneiras de escolher o conjunto dos três livros

Resposta: **(A)**

4. **4.1.** Na escolha, ao acaso, de um trabalhador da empresa, sejam os acontecimentos:

H : "O trabalhador escolhido é um homem";

R : "O trabalhador escolhido está em condições de pré-reforma"

É dado que:

- $P(R)=\frac{1}{2}P(H) \Leftrightarrow P(H)=2P(R)$
- $P(H\mid R)=\frac{6}{10}=0,6$
- $P(\overline{R}\mid \overline{H})=0,75$

$$P(H\mid R)=0,6 \Leftrightarrow \frac{P(H\cap R)}{P(R)}=0,6 \Leftrightarrow P(H\cap R)=0,6P(R)$$

$$P(\overline{R}\mid \overline{H})=0,75 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{R}\cap\overline{H})}{P(\overline{H})}=0,75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{R\cup H})=0,75P(\overline{H}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-P(R\cup H)=0,75\left[1-P(H)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\left[P(R)+P(H)-P(R\cap H)\right]=0,75-0,75P(H) \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P(H)=2P(R) \text{ e} \\ P(H\cap R)=0,6P(R) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 1-P(R)-2P(R)+0,6P(R)=0,75-0,75\times 2P(R) \Leftrightarrow \quad \left| \ 0,75\times 2=1,5\right.$$

$$\Leftrightarrow -P(R)-2P(R)+0,6P(R)+1,5P(R)=0,75-1 \Leftrightarrow \quad \left| \ -1-2+0,6+1,5=-0,9\right.$$

$$\Leftrightarrow -0,9P(R)=-0,25 \Leftrightarrow P(R)=\frac{0,25}{0,9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(R)=\frac{25}{90} \Leftrightarrow P(R)=\frac{5}{18}$$

Portanto, como $P(R)=\frac{5}{18}$, podemos concluir que cinco em cada 18 trabalhadores da empresa, estão em condições de pré-reforma.

4.2 $P(H)=2P(R)=2\times\frac{5}{18}=\frac{5}{9}$

$P(\overline{H})=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

$\frac{4}{9}$ dos trabalhadores da empresa são mulheres.

$\frac{4}{9}\times 540=240$

Trabalham na empresa 540 mulheres.

5. $P(B \mid A)$ significa a probabilidade de retirar da caixa 2 uma bola com número ímpar, sabendo que se retiraram da caixa 1 duas bolas cuja soma dos respetivos números é um número ímpar, ou seja, uma das bolas tem número par e a outra tem número ímpar.

Seja n o número de bolas com número ímpar que estavam na caixa 2.

Dado sabermos que na caixa 2 foi introduzida uma bola com número par e outra com número ímpar podemos concluir que esta caixa ficou com a seguinte composição:

Bolas com número ímpar:	$n+1$
Bolas com número par:	$31+1$
Total de bolas na caixa:	$n+33$

Então, $P(B \mid A) = \dfrac{n+1}{n+33}$

$$P(B \mid A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+33} = \frac{1}{3} \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 3n+3 = n+33 \Leftrightarrow 2n = 30 \Leftrightarrow n = 15$$

Resposta: **(B)**

6.

6.1. Casos possíveis:

$$\underset{6}{\underline{1.^{\text{o}}A}}\ \underset{6}{\underline{2.^{\text{o}}A}}\ \underset{6}{\underline{3.^{\text{o}}A}}\ \underset{6}{\underline{4.^{\text{o}}A}}$$

Número de casos possíveis: ${}^{6}A'_4 = 6^4 = 6\times 6\times 6\times 6$

Casos favoráveis:

$$\underset{2}{\underline{1.^{\text{o}}A}}\ \underset{6}{\underline{2.^{\text{o}}A}}\ \underset{6}{\underline{3.^{\text{o}}A}}\ \underset{3}{\underline{4.^{\text{o}}A}}$$

O algarismo das unidades pode se 2, 4 ou 6.

O algarismo dos milhares pode ser 5 ou 6.

Número de casos favoráveis: $2\times 6\times 6\times 3$

A probabilidade pedida é: $P = \dfrac{2\times 6\times 6\times 3}{6\times 6\times 6\times 6} = \dfrac{1}{6}$

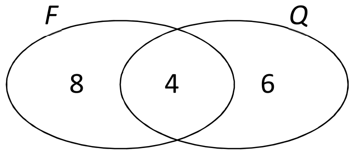
Resposta: **(A)**

6.2. $\underbrace{{}^{6}C_4 + {}^{6}C_5}_{} = 15 + 6 = 21$

Número de maneiras de escolher as quatro ou cinco faces para pintar de azul (as restantes são pintadas de vermelho)

Resposta: **(D)**

7. $\#F \cap Q = 18$, $\quad \#F = 12$, $\quad \#Q = 10$



7.1. $\#F \cup Q = \#F + \#Q - \#F \cap Q$

$18 = 12 + 10 - \#F \cap Q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \#F \cap Q = 12 + 10 - 18 \Leftrightarrow \#F \cap Q = 4$

Número de casos possíveis: ${}^{18}C_2 = 153$

Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_2 + {}^{10}C_2 - {}^{4}C_2 = 105$

Estes pares entraram duas vezes

A probabilidade pedida é $P = \dfrac{105}{153} \approx 0{,}686 \approx 69\%$

Resposta: **(C)**

7.2. De acordo com as opções apresentadas no quadro ao lado, o número de comissões que é possível formar é dado por:

FIS e QUI	Outros	Total
4	14	18
1	4	
2	3	
3	2	
4	1	

${}^{4}C_1 \times {}^{14}C_4 + {}^{4}C_2 \times {}^{14}C_3 + {}^{4}C_3 \times {}^{14}C_2 + {}^{4}C_4 \times {}^{14}C_1 =$

$= 4004 + 2184 + 364 + 14 = 6566$

Ou

${}^{18}C_5 - \underline{{}^{4}C_0 \times {}^{14}C_5} = 6566$

Comissões só com professores que lecionam apenas uma disciplina

Todas as comissões de cinco elementos.

A comissão pode ser formada de 6566 maneiras.

8. $P\left(\overline{B} \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P\left(\left(\overline{B} \cup \overline{A}\right) \cap \left(\overline{B} \cup B\right)\right) = P\left(\left(\overline{B \cap A}\right) \cap E\right) =$

$= P\left(\overline{B \cap A}\right) = 1 - P(B \cap A)$

$P\left(\overline{B} \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P\left(\overline{B}\right) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - P(B \cap A) = 1 - P(B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2P(B \cap A) = -P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{2} P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow P(A|B) = \dfrac{1}{2}$

Resposta: **(C)**

9. Na tabela seguinte relaciona-se a monotonia de f' com o sinal de f'' e o sentido da concavidade de gráfico de f :

x		x_0	
f'	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Apenas o gráfico apresentado em (A) se ajusta a estes resultados.

Resposta: **(A)**

10. $f'(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

10.1. $r:\ y=2x+k$

A reta r tem declive 2. Logo, esta reta é tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa x tal que $f'(x)=2$.

$$f'(x)=2 \Leftrightarrow \frac{4x}{x^2+1}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{x^2+1}-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-2x^2-2}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-2x^2-2=0 \wedge x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow \qquad \left|\ x^2+1\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

A reta r é tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa 1.

É dado que o ponto de tangência tem ordenada 5. Logo, a reta r passa no ponto de coordenadas $(1, 5)$.

$r:\ y=2x+k$

Para $x=1$ e $y=5$, temos:

$5=2\times 1+k \Leftrightarrow k=5-2 \Leftrightarrow k=3$

10.2. $f''(x)=\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)'=\frac{(4x)'(x^2+1)-(4x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{4(x^2+1)-(4x)(2x)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow 4-4x^2=0 \wedge (x^2+1)^2 \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-4x^2=0 \Leftrightarrow 4x^2=4 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$$

O sinal de f'' é o sinal de $4-4x^2$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 1[$.

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão, um com abcissa -1 e outro com abcissa 1.

11. Se f é uma função polinomial do terceiro grau então $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Temos, então:

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ e

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6ax+2b=0$

Como $a \neq 0$, esta equação tem uma única solução que é $x=-\frac{2b}{6a} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{3a}$.

Por outro lado, sendo f'' uma função polinomial do primeiro grau muda de sinal no zero, ou seja, em $x=-\frac{b}{3a}$.

Portanto, o gráfico da função f tem um e um só ponto de inflexão cuja abcissa é $x=-\frac{b}{3a}$.