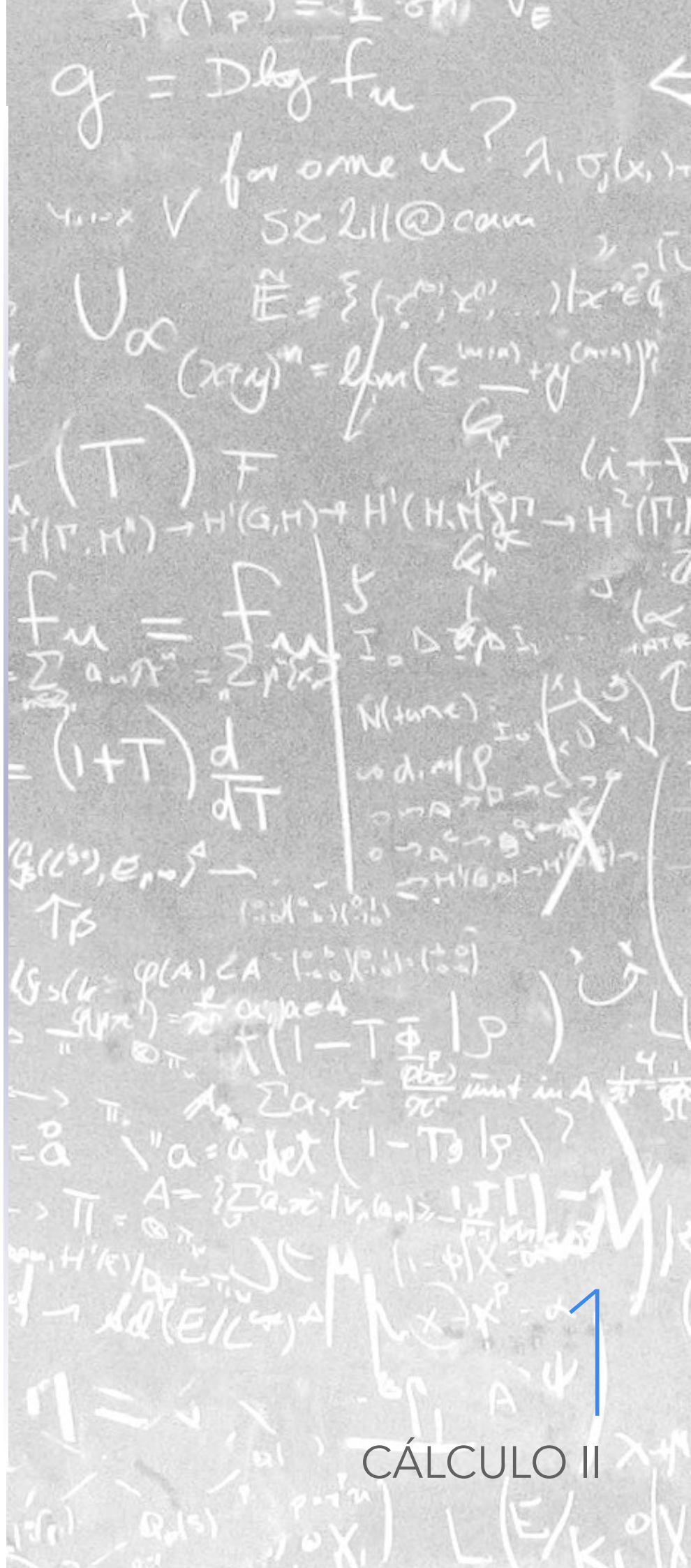


All science requires mathematics. The knowledge of mathematical things is almost innate in us. This is the easiest of sciences, a fact which is obvious in that no one's brain rejects it; for laymen and people who are utterly illiterate know how to count and reckon.

Francis Bacon



Atenção!

Todo o conteúdo deste documento pode conter alguns erros de sintaxe, científicos, entre outros... **Não estude apenas a partir desta fonte.** Este documento apenas serve de apoio à leitura de outros livros, tendo nele contido todo o programa da disciplina de Cálculo II, tal como foi lecionada, no ano letivo de 2014/2015, na Universidade de Aveiro. Este documento foi realizado por Rui Lopes.

mais informações em ruieduardofalopes.wix.com/apontamentos

A disciplina de Cálculo II (als2) existe como continuação dos conteúdos programáticos da disciplina do primeiro semestre Cálculo I (als1), sobre a qual se retoma o estudo a nível da análise de funções de integração e, mais à frente, se inicia o estudo de séries matemáticas, fundamentando conhecimentos em relação a convergências e restantes comportamentos das séries, tal como a sua relação com funções integrantes.

1. Transformada de Laplace

A transformação por Laplace é um processo que a uma função f , quer seja real ou complexa, de variável real, faz corresponder uma outra função F de variável complexa. À primeira variável dá-se o âmbito de ser **original**, enquanto que à segunda variável damos o âmbito de ser **transformada**. Este método permite assim converter o grau de complexidade de problemas sendo aplicado, nomeadamente, na determinação de soluções de equações e sistemas de equações diferenciais.

As funções com que iremos trabalhar, quer originais, quer transformadas, serão sempre reais de variável real e suporemos que todas as funções originais f verificam a condição em que $f(t) = 0$, se $t < 0$. Dado isto, seja uma função f , real de variável real, verificando tal condição. Se o integral impróprio em Equação 1 existir, onde s é um numero real, a este integral damos o nome de **transformada de Laplace** de f , designada pela letra “L” caligráfica seguida da função original entre chavetas - $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

original
transformada

transformada de Laplace
© Pierre Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

equação 1

Atendendo a que em Equação 1 a variável de integração é t , resulta que a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de f é uma função de s , habitualmente notada pela correspondente letra maiúscula, como designado na Equação 2.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

equação 2

Como já devemos saber, a transformada de Laplace como designada pela Equação 1 é equivalente a identificar o limite de uma constante b que tende para o infinito, do integral da Equação 1 de 0 até b (como visível na Equação 3). Daqui podemos concluir que a existência da transformada de Laplace está condicionada pela existência (com valor finito) do limite da Equação 3 e ainda, naturalmente, pela existência do integral definido que figura na mesma Equação 3.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

equação 3

Sendo assim, experimentemos determinar a transformada de Laplace com $f(t) = 2$. A Equação 4 reflete esta análise.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2e^{-st} dt = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s}$$

equação 4

Na Equação 4, se o limite apenas é finito se $s > 0$ temos que ele é igual a $1/s$. Sendo assim, ficamos com a solução final de que $\mathcal{L}\{2\} = 2/s$, se $s > 0$. ■

No fundo a transformada de Laplace tem como objetivo a **simplicificação** do cálculo em certas aplicações com ordens de complexidade algo elevadas. A lógica que incide neste tópico é semelhante à lógica da busca de uma simplificação para o cálculo de quantidades numa multiplicação. Antes, quando não havia como computar multiplicações de números muito grandes de forma automática, a utilização de uma relação que permitisse o cálculo de uma razão de multiplicação através de uma soma era a solução para o problema - utilizava-se assim a relação estabelecida com a função logaritmo, na qual o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos. Matemáticos faziam assim extensas tabelas de logaritmos que explicitavam um método para a descoberta de produtos de quantidades magnânimas. Estas tabelas tinham, em si, duas colunas - uma refletindo uma quantidade x e a outra que refletia o logaritmo dessa mesma quantidade. Assim, para saber o logaritmo do produto da quantidade x com a quantidade y , procurava-se o logaritmo da quantidade x e o logaritmo da quantidade y e somava-se. Depois, numa busca no sentido inverso, procurava-se o resultado da última soma na coluna dos logaritmos, o que, depois de identificado, produzia uma dada quantidade z , que era igual a x de y .

A lógica, sendo assim, é a mesma. De forma a simplificar uma dada função $f(t)$ fazemos a sua transformada e depois devemos retornar ao valor de origem, ante-transformação. Este retorno ao valor original é tópico a ver mais adiante, no decorrer desta unidade.

Então como é que podemos calcular a transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$, onde a é uma constante real? A Equação 5 traduz o desenvolvimento da resolução deste problema.

simplicificação

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt = \\ &= \frac{1}{s-a} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-(s-a)t} \right]_{t=0}^{t=b} = \frac{1}{s-a} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-(s-a)b} - 1) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s-a} & \text{se } s > 0 \\ \infty & \text{se } s \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

equação 5

Chegando a este resultado, temos que $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/s-a$, se $s > a$. Esta conclusão vai de encontro ao resultado anterior, de $\mathcal{L}\{2\} = 2/s$, se $s > 0$, pelo que $\mathcal{L}\{2\}$ é o dobro de $\mathcal{L}\{1\}$. ■

Se tomarmos a função $f(t)$ como a função da Equação 6, sendo ela definida por ramos, podemos, dada a linearização, fazer o somatório dos integrais com intervalo de integração definido pelos ramos da função.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 2 \\ 0 & \text{se } t = 2 \end{cases}$$

equação 6

Dada a função em Equação 6, podemos calcular a sua transformada de Laplace da seguinte forma: sendo que a função, para $t = 2$, toma um valor pontual, podemos dividir o nosso intervalo de integração de 0 a ∞ em dois - o primeiro de 0 a 2 e o segundo de 2 a ∞ . Vejamos a Equação 7 para mais detalhes.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^2 e^{-st} f(t) dt + \int_2^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^2 e^{-st} dt + \int_2^\infty e^{-st} dt = \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \mathcal{L}\{1\} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

equação 7

Se pretendêssemos calcular a transformada de Laplace da função $f(t) = t$ (função identidade), ela teria a resolução com a forma da Equação 8.

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t dt$$

equação 8

Na Equação 8, para podermos prosseguir o nosso desenvolvimento devemos relembrar a técnica de primitivação por partes, sobre a qual, aplicada de forma a derivar t , temos a Equação 9, com $s \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{e^{-st}}{-s} t \right]_{t=0}^{t=b} - \int_0^b \frac{e^{-st}}{-s} \cdot 1 dt \right) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-sb}}{-s} b - 0 + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \right) = \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-sb}}{-s} b + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} \right), s > 0 = \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} \frac{b}{e^{sb}} + \frac{1}{s^2} \right), s > 0 = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{s^2} & \text{se } s > 0 \\ \infty & \text{se } s \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

equação 9

Concluindo, como solução, apresenta-se que $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$, com $s > 0$. $\blacksquare$

Através do resultado obtido em Equação 9, podemos estender, sem prejuízo de perda de detalhe por ausência de demonstração, que a transformada de Laplace de funções $f(t)$ do tipo t^n , com $n \in \mathbb{N}_0$, é a explícita em Equação 10.

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

equação 10

Até ao momento, podemos criar uma tabela na qual fazemos corresponder uma dada função $f(t)$ a uma transformada $F(s)$. Criemos então uma **tabela de transformadas** de Laplace, que, terá apenas, por enquanto, três linhas (Figura 1).

tabela de transformadas

função	transformada
1	$1/s, s > 0$
e^{at}	$1/(s-a), s > a, a \in \mathbb{R}$
t^n	$n!/s^{(n+1)}, s > 0, n \in \mathbb{N}_0$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2), s > 0, a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2), s > 0, a \in \mathbb{R}$

figura 1

tabela de transformadas (1)

nota!! Na Figura 1 acrescentaram-se as transformadas das funções seno e cosseno. Dado que iremos estudar as transformadas das suas hiperbólicas, por questões de redundância, não iremos demonstrar os seus valores.

Aquando do estudo de primitivação e integração, estudámos um resultado importante para aplicações - a linearidade. Em termos de transformada de Laplace também existe esse resultado. A demonstração, embora não seja feita aqui, provém de princípios algébricos. Sendo assim, damos o nome de linearidade a duas propriedades das transformadas. A primeira propriedade é a da **soma das transformadas**, sobre a qual a soma das transformadas é igual à transformada das somas (Equação 11).

$$\mathcal{L}\{f(t) + f(g)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{f(g)\}$$

soma das transformadas

equação 11

A segunda propriedade é a de **multiplicação por escalar**, sobre a qual é permitido afirmar que a multiplicação de uma função $f(t)$ por um escalar α é igual à transformada da função pelo mesmo escalar, como é visível na Equação 12.

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$$

multiplicação por escalar

equação 12

Dado isto, podemos complementar a nossa tabela com mais os seguintes dois resultados (Figura 2¹).

função	transformada
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s)$, $s > s_f, s_g$
$\alpha \cdot f(t)$	$\alpha \cdot F(s)$, $s > s_f$

figura 2

tabela de transformadas (2)

Como podemos assim calcular a transformada de Laplace da função trigonométrica seno hiperbólico, isto é, $\mathcal{L}\{\sinh(at)\}$? Em Equação 13 podemos verificar uma possível resolução.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{at} - e^{-at}\} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{at}\} - \mathcal{L}\{e^{-at}\}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right), s > |a| = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(s+a) - (s-a)}{(s-a)(s+a)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{s^2 - a^2} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}, s > |a| \end{aligned}$$

equação 13

■

¹ Em ambas as transformadas da Figura 2, s_f corresponde ao primeiro valor válido para a transformada de Laplace.

Então e a função cosseno hiperbólico, isto é, $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}$ - Equação 14?

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at} + e^{-at}\} = \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{e^{at}\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\}) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right), s > |a| = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(s+a) + (s-a)}{(s-a)(s+a)}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2 - a^2}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|\end{aligned}$$

equação 14

■

Dado isto, podemos acrescentar à nossa tabela mais duas linhas ($\cosh(at)$ e $\sinh(at)$) - Figura 3.

função	transformada
$\sinh(at)$	$a/(s^2 - a^2)$, $s > a $
$\cosh(at)$	$s/(s^2 - a^2)$, $s > a $

figura 3

tabela de transformadas (3)

Consideremos agora uma função $f = e^{\lambda t}.f(t)$, onde λ é um valor real. Qual é a transformada de Laplace desta função? Começemos por aplicar a expressão da transformada (Equação 15).

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\lambda t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\lambda)t} f(t) dt$$

equação 15

Qual é a diferença entre o integral obtido em Equação 15 e a definição de transformada de Laplace? O valor de s passou de s para $(s - \lambda)$. Sendo assim, eis a Equação 16.

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-\lambda)t} f(t) dt = F(s - \lambda), \quad (s - \lambda) > s_f \therefore s > s_f + \lambda$$

equação 16

■

Vejamos agora o caso de uma função $f(t - a)$. Há que considerar que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e não $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Dado que as transformadas de Laplace definem-se de $[0, \infty[$, temos que controlar a função f com a **função de Heaviside**. A função de Heaviside, homenagem a Oliver Heaviside, é definida conforme a Equação 17.

função de Heaviside

© Oliver Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

equação 17

Para controlarmos a função f referida temos que considerar a função $H(t - a)$, definida em Equação 18.

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ 1 & \text{se } t \geq a \end{cases} \quad \text{equação 18}$$

Assim, como será a transformada de $H(t-a)f(t-a)$ em s ? Vejamos (Equação 19):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st} H(t-a) f(t-a) dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} H(t-a) f(t-a) dt \end{aligned} \quad \text{equação 19}$$

Aplicando uma mudança de variável, temos que $(t-a) = u$. Sendo assim, colocam-se as seguintes condições em Equação 20.

$$t-a=u \therefore r=u+a \quad dt=du \quad (t=0 \rightarrow u=-a; \quad t=b \rightarrow u=b-a) \quad \text{equação 20}$$

Dadas as condições para a mudança de variável ficamos com a possível resolução em Equação 21.

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-a}^{b-a} e^{-s(u+a)} H(u) f(u) du = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^0 e^{-s(u+a)} H(u) f(u) du + \int_0^{b-a} e^{-s(u+a)} H(u) f(u) du \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(0 + \int_0^{b-a} e^{-s(u+a)} H(u) f(u) du \right), \quad H(0)=0 \quad = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_0^{b-a} e^{-s(u+a)} f(u) du \right), \quad H(1)=1 \quad = \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u) du, \quad b \rightarrow \infty \Rightarrow b-a \rightarrow \infty \quad = \\ &= \int_0^\infty e^{-su} e^{-sa} f(u) du = \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du, \quad s, a \in \mathbb{R} \quad = \\ &= e^{-sa} F(s) \end{aligned} \quad \blacksquare \quad \text{equação 21}$$

Voltando à nossa tabela de transformadas, podemos agora acrescentar este resultado obtido em Equação 21 - Figura 4.

função	transformada
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-sa}.F(s)$, $a>0, s>s_1$

figura 4
tabela de transformadas (4)

Consideremos a função $f(at)$. Como podemos calcular a sua transformada de Laplace? Na página seguinte encontra-se uma proposta de demonstração de um resultado para a transformada de Laplace (Equação 22, Equação 23 e Equação 24).

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(at) dt$$

equação 22

Aplicando a técnica de mudança de variável, temos as seguintes condições:

$$at = u \therefore t = \frac{u}{a} \quad dt = \frac{1}{a} du \quad (t = 0 \rightarrow u = 0; \quad t = b \rightarrow u = ab)$$

equação 23

Sendo assim, regressando à Equação 22 na Equação 24, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(at) dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{ab} e^{-\frac{su}{a}} f(u) \frac{du}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{ab} e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du, \quad b \rightarrow \infty \Rightarrow ab \rightarrow \infty = \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0 \end{aligned}$$

equação 24

Voltando de novo à nossa tabela, temos que adicionar este último resultado -
- Figura 5.

função	transformada
$f(at)$	$(1/a) \cdot F(s/a)$, $a > 0, s > s_f \cdot a$

figura 5

tabela de transformadas (5)

É possível calcular a transformada de Laplace de uma derivada de uma função $f(t)$? Vejamos na Equação 25 uma possível demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left[e^{-st} f(t) \right]_{t=0}^{t=b} - \int_0^b -se^{-st} f(t) dt \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-sb} f(b) - f(0) - \int_0^b -se^{-st} f(t) dt \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-sb} f(b) - f(0) + sF(s) \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-sb} f(b) \right) - f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

equação 25

Agora, se o limite entre parênteses for zero, então a transformada de Laplace da derivada $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, com $s > s_f$. Acrescentando esse resultado à tabela da Figura 6, temos uma tabela de transformadas já bastante completa.

função	transformada
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$, $s > s_f$

figura 6

tabela de transformadas (6)

Já que calculámos a transformada para a primeira derivada de f , como será para as seguintes derivadas? Vejamos o caso de $\mathcal{L}\{f''(t)\}$, na Equação 26.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{g'(t)\} = \\ &= sG(s) - g(0) = \\ &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = \\ &= s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

equação 26

Do mesmo modo, para uma n -derivada a expressão da transformada de Laplace dessa função $f^{(n)}$ é representada pela Equação 27².

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

equação 27

Na resolução feita na Equação 25 convém frisar que há necessidade de impor uma definição para ultrapassar a problemática da condição de um valor para um limite. Sendo assim, define-se que uma dada função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **seccionalmente contínua** se existe partição $\{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$, tal que f é contínua em $]x_{i-1}, x_i[$, com $i = 1, \dots, n$, e existem, e são finitos, os limites laterais da Equação 28.

seccionalmente contínua

$$f(x_i^+) := \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x), i = 0, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad f(x_i^-) := \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x), i = 1, \dots, n$$

equação 28

Um exemplo de função seccionalmente contínua é a apresentada na Figura 7, com partições x_n , com $n = 5$.

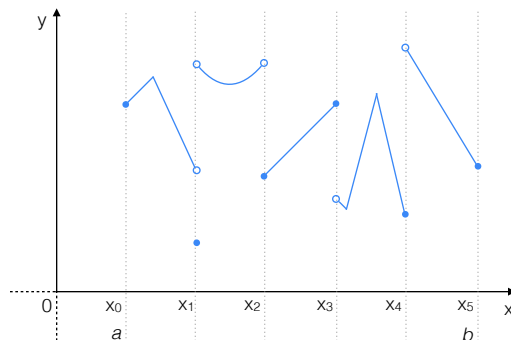


figura 7
função seccionalmente
contínua

Um exemplo de gráfico de função que não é seccionalmente contínua está na Figura 8.

Relembremos a disciplina de Cálculo I (als1) e integremos, com este conceito, o desenvolvimento de que se uma dada função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então é seccionalmente contínua em $[a, b]$, pelo que também é integrável em $[a, b]$.

Sendo assim, uma função $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ diz-se seccionalmente contínua se for seccionalmente contínua em $[0, b]$, $\forall b \in \mathbb{R}^+$ (isto é, qualquer b real positivo).

² (n) corresponde à n -derivada da função f .

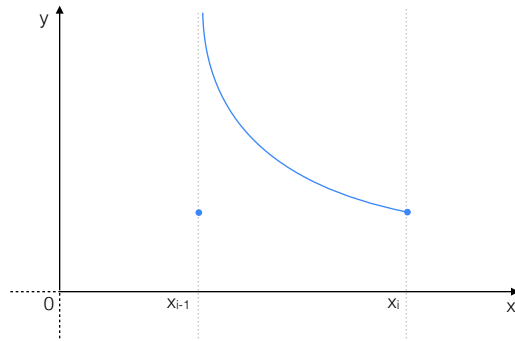


figura 8

função não seccionalmente
contínua

Uma segunda definição necessária é a que uma função $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ diz-se de **ordem exponencial a** (à direita), com $a \in \mathbb{R}$, se existem $M, T \geq 0$, tais que validem a expressão em Equação 29.

ordem exponencial a

$$f(t) \leq Me^{at}, \quad \forall t \geq T$$

equação 29

Na Figura 9 podemos ver uma representação gráfica do efeito da Equação 29.

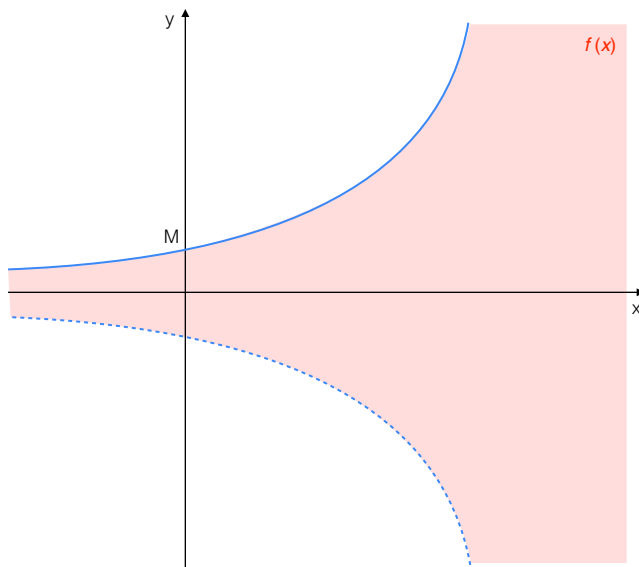


figura 9

representação gráfica de
Equação 29 (a função $f(t)$
está na parte preenchida a
vermelho se for de ordem
exponencial a)

Um **teorema** diz-nos que se uma função $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua e de ordem exponencial com $a \in \mathbb{R}$, então existe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > a$. Demonstrando este resultado temos a Equação 30, Equação 31, Equação 32, Equação 33 e Equação 34.

teorema

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt; \quad \text{quanto é } \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt ?$$

equação 30

Da disciplina de Cálculo I (als1) devemos saber que se uma função com módulo é convergente, então a mesma função sem o módulo também é convergente. Dado isto, como o módulo do produto é o produto dos módulos e e^{-st} é sempre positiva, temos (na página seguinte):

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt &= \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt = \\ &= \int_0^T e^{-st} |f(t)| dt + \int_T^\infty e^{-st} |f(t)| dt\end{aligned}$$

equação 31

O integral da primeira parcela dá um valor que é positivo e finito, mas e o segundo? Pela definição em Equação 29, dado que ambas as funções são não-negativas, pelo critério de comparação:

$$\begin{aligned}\int_T^\infty e^{-st} |f(t)| dt &\leq \int_T^\infty M e^{(a-s)t} dt \therefore \\ \therefore \int_T^\infty e^{-st} |f(t)| dt &\leq M \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_T^b \therefore \\ \therefore \int_T^\infty e^{-st} |f(t)| dt &\leq \frac{M}{a-s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{(a-s)b} - e^{(a-s)T})\end{aligned}$$

equação 32

Como $s > a$, $(a - s)$ é negativo, pelo que $e^{(a-s)b}$ tenderá para zero, com $b \rightarrow \infty$, pelo que:

$$\int_T^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq \frac{M}{a-s} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(a-s)T}$$

equação 33

Por conseguinte, o integral seguinte converge, se $s > a$.

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

equação 34

Retomando a nossa tabela de transformadas de Laplace, vimos que é possível calcular a expansão da transformada da primeira derivada. Na sua determinação, atingimos o limite da Equação 35.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} f(b) e^{-sb}$$

equação 35

Se virmos bem o módulo do interior do limite da Equação 35 temos a Equação 36.

$$0 \leq \lim_{b \rightarrow \infty} |f(b) e^{-sb}|$$

equação 36

Dada a definição em Equação 29, temos a Equação 37.

$$0 \leq \lim_{b \rightarrow \infty} |f(b) e^{-sb}| \leq \lim_{b \rightarrow \infty} M e^{at} e^{-sb} = M \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(a-s)b} = 0, \quad s > a$$

equação 37

Sendo assim é verdade que a transformada de Laplace da primeira derivada de uma função f é o valor tabulado se e só se $f'(t)$ for seccionalmente contínua e se $f(t)$ for de ordem exponencial a , com a real. Acrescentando assim à nossa tabela de transformadas a transformada da segunda derivada e da n -derivada de uma função f , seccionalmente contínua e de ordem exponencial a (Figura 10).

função	transformada
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, com f'' sec. contínua e f, f' de ordem exponencial a
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ * com $f^{(0)}=f$ e se $f^{(n)}$ for seccionalmente contínua e $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ for de ordem exponencial a

figura 10

tabela de transformadas (7)

Não tendo ainda todas as ferramentas matemáticas para sua determinação, eis uma linha nova para a nossa tabela, na Figura 11.

função	transformada
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$, $s > s_1$, $n \in \mathbb{N}$, com as mesmas condições da derivada geral

figura 11

tabela de transformadas (8)

Transformada inversa de Laplace

Sendo unívoca, a relação na direção de original para transformada, será que podemos desvendar a direção oposta (de transformada para original)? Nem sempre é possível, dado que há casos em que várias funções originais têm a mesma transformada de Laplace. Mas excluindo esses casos, podemos determinar a **transformada inversa de Laplace**. Assim, se $F(s)$ for uma transformada de Laplace de $f(t)$, isto é, se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então verifica-se a Equação 38.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

transformada inversa de Laplace

equação 38

A transformada inversa de Laplace também segue as propriedades de linearidade das transformadas originais de Laplace. Sendo assim, a propriedade da **soma das transformadas** inversas está em Equação 39.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) + G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

soma das transformadas
equação 39

Já a **multiplicação por um escalar** é visível em Equação 40.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F(s)\} = \lambda \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

multiplicação por um escalar

equação 40

Experimentemos assim calcular a seguinte transformada inversa (Equação 41).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9} + \frac{s}{s^2+4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2 \times 3}{s^2+9}\right\} + \cos(2t) = \\ &= \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + \cos(2t) = \\ &= \frac{2}{3} \sin(3t) + \cos(2t) \end{aligned}$$

equação 41

Alguns problemas podem ocorrer quando precisamos de calcular a transformada inversa do produto de duas transformadas, isto é, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$. Não

sendo impossível, mas também não o mais prático, usar o método da primitivação por partes, depois de vários estudos comprovou-se uma construção, designada por “produto de” **convolução**, representada pelo símbolo $*$, tal que se verifique a Equação 42.

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$$

convolução

equação 42

Por definição, temos que se $f, g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, integráveis a cada $[0, t]$, verifica-se a Equação 43.

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad t \geq 0$$

equação 43

Propondo que se $f, g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ forem seccionalmente contínuas e de ordem exponencial s_0 , então verifica-se a Equação 44.

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad s > s_0$$

equação 44

Uma possível consequência da Equação 44, acontece para uma dada função $g(t) \equiv 1$, para a qual temos Equação 45.

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}, \text{ pelo que } F(s)G(s) = F(s)\frac{1}{s}$$

equação 45

Podemos assim finalizar a nossa tabela de transformadas com mais duas linhas na Figura 12.

função	transformada
1	$1/s, s > 0$
e^{at}	$1/(s-a), s > a, a \in \mathbb{R}$
t^n	$n!/s^{(n+1)}, s > 0, n \in \mathbb{N}_0$
$\sin(at)$	$a/(s^2 + a^2), s > 0, a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2 + a^2), s > 0, a \in \mathbb{R}$
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s), s > s_f, s_g$
$\alpha \cdot f(t)$	$\alpha \cdot F(s), s > s_f$
$\sinh(at)$	$a/(s^2 - a^2), s > a $
$\cosh(at)$	$s/(s^2 - a^2), s > a $
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-sa} \cdot F(s), a > 0, s > s_f$
$f(at)$	$(1/a) \cdot F(s/a), a > 0, s > s_f \cdot a$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0), s > s_f$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \text{ com } f'' \text{ sec. contínua e } f, f' \text{ de ordem exponencial a}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ * com $f^{(0)} = f$ e se $f^{(n)}$ for seccionalmente contínua e $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ for de ordem exponencial a
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s), s > s_f, n \in \mathbb{N}$, com as mesmas condições da derivada geral
$(f * g)(t)$	$F(s) \cdot G(s), s > s_0$
$(\text{integral de } 0 \text{ a } t) \int_0^t f(\tau) d\tau$	$F(s) / s$

figura 12

tabela de transformadas completa

2. Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Se considerarmos um objeto que verifica um movimento retilíneo uniformemente variado podemos verificar um comportamento como o representado na Figura 13.



figura 13
movimento retilíneo
uniformemente variado

No exemplo da Figura 13, saber a posição da partícula em movimento é possível calculando $x(t)$, mas para saber a aceleração da mesma há que derivar duplamente a posição $x(t)$, isto é, calcular $x''(t)$ - o que resulta numa constante. Este é um exemplo de equação diferencial.

Um outro exemplo, algo análogo ao anterior, é o da queda dos graves (Figura 14).

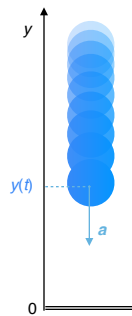


figura 14
queda dos graves

Na queda dos graves um objeto cai sob a ação da gravidade. Pela segunda lei de Newton sabemos que a força resultante é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração a que se encontra sujeito, isto é, $F = m \cdot a$. Como já vimos no exemplo anterior, a aceleração é a dupla derivação da posição da partícula, pelo que $a = y''(t)$. Dado isto, ficamos com $F = m \cdot y''(t)$. Sabendo que a aceleração da gravidade é representada por $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$, temos que $F = m \cdot g$, pelo que $y''(t) = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$.

Num modelo mais realista não podemos considerar apenas a gravidade, mas antes temos que considerar também a relação de força de atrito. Sendo assim, $F(t) = m \cdot y''(t)$ e $F(t) = m \cdot (9.8) - k y'(t)$, com k como constante de proporcionalidade positiva (daí o sinal negativo - por contrariar o sentido da gravidade). Juntando ambas as forças, temos que $y''(t) = 9.8 - k y'(t)$. Eis mais um exemplo de equação diferencial, não tão simples como o anterior.

Ainda outro exemplo de equação diferencial pode ser encontrado em circuitos em série do tipo LR, como o esquematizado na Figura 15.

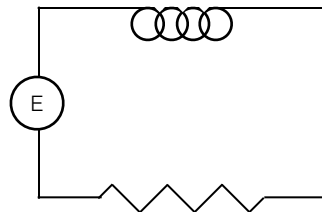


figura 15
circuito LR

Pela segunda lei de Kirchhoff sabemos a Equação 46, onde I é a intensidade da corrente elétrica, L é a indutância e R é a resistência. A Equação 46 é outra equação diferencial. Grande parte dos fenómenos físicos são descritos por equações diferenciais.

© **Gustav Kirchhoff**

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E(t)$$

equação 46

Mas como é que podemos lidar com este tipo de equações? Consideremos, para tal, a Equação 47.

$$f'(t) + 2f(t) = e^t, \quad \text{com} \quad f(0) = 2$$

equação 47

Se $f'(t) + 2f(t) = e^t$ for verdade, como será a sua transformada de Laplace? A transformada de Laplace do primeiro membro tem de ser igual à transformada de Laplace do segundo membro. Calculemos então o resultado da Equação 47 (Equação 48, Equação 49, Equação 50 e Equação 51):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t) + 2f(t)\} &= \mathcal{L}\{e^t\} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} + 2\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow sF(s) - f(0) + 2\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow sF(s) - f(0) + 2F(s) = \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow sF(s) - 2 + 2F(s) = \frac{1}{s-1}, \quad f(0) = 2 \end{aligned}$$

equação 48

Se considerarmos $F(s)$ como a nossa incógnita temos:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (s+2)F(s) &= \frac{1}{s-1} + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F(s) &= \frac{1}{(s-1)(s+2)} + \frac{2}{(s+2)} \end{aligned}$$

equação 49

Para achar $f(t)$ temos de achar a transformada inversa de Laplace da soma obtida:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)} + \frac{2}{(s+2)}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)}\right\} = \dots \\ &= \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} \end{aligned}$$

equação 50

Sendo assim, concluindo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \dots = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + 2e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

equação 51

■

Já tendo ideia do conceito de equação diferencial, vejamos a sua definição formal. Uma **equação diferencial ordinária** (usualmente abreviada pela sigla EDO) é uma expressão da forma de Equação 52, com variável independente x e variável dependente y , com **ordem** n .

**equação diferencial
ordinária
ordem**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

equação 52

A equação $y''(x) = -9.8 - y'(x)$ é uma equação diferencial, embora não tenha o aspeto de Equação 52. Para ficar com o aspeto semelhante, basta colocar tudo no primeiro membro da equação, como podemos ver na Equação 53.

$$y''(x) + 9.8 + y'(x) = 9.8 + 0 \times y(x) + y'(x) + y''(x) = 0 \Leftrightarrow F(x, y, y', y'') = F(x, y, y', y'') = 0$$

equação 53

Por vezes, as equações diferenciais são apresentadas com a forma da Equação 54.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad n \in \mathbb{N}$$

equação 54

A esta forma da Equação 54 damos o nome de **forma normal**, a qual nem sempre é possível de ser apresentada. A equação que estamos a aplicar como exemplo de equação diferencial, na forma normal fica $y''(x) = f(x, y, y')$.

A solução de uma equação diferencial não é um número, mas antes uma função ou um conjunto de funções. De forma matematicamente formal, diz-se que $y = \varphi(x)$ para x num certo intervalo aberto é uma **solução** da equação diferencial ordenaria, se se verificar a Equação 55.

forma normal

solução

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

equação 55

Um exemplo de equação diferencial ordinária é $y' = 1$. Para calcular as suas soluções temos que efetuar o seguinte cálculo (Equação 56):

$$y' = 1, \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow y = t + c, \quad t, c \in \mathbb{R}$$

equação 56

Outro caso, é o da Equação 57, para $y''=1$, onde temos que efetuar o seguinte cálculo:

$$y'' = 1, \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = t + c \Rightarrow y = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2, \quad t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

equação 57

Podemos verificar que das soluções de $y' = 1$ e $y'' = 1$ há uma solução entre a ordem da equação e a solução geral. Se fizéssemos o mesmo cálculo para $y^{(n)}$ daria, concerteza, todas as soluções que contêm exatamente n constantes arbitrárias. Uma **solução geral** da equação diferencial ordinária é uma expressão que nos dá todas as soluções possíveis da equação diferencial ordinária. Um outro ponto de vista dir-nos-á que a solução geral é o conjunto de todas as soluções possíveis da equação diferencial ordinária. No primeiro exemplo de solução (Equação 56), podemos escrever a solução das seguintes formas em Equação 58.

solução geral

$$y = t + c, \quad t, c \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \{f(t) = t + c, \quad t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$$

equação 58

Um outro conceito importante é o de **solução particular** de uma equação diferencial ordinária, que se define como qualquer solução concreta, isto é, sem constantes arbitrárias, dessa equação diferencial. A um conjunto destas soluções dependentes exatamente de n constantes arbitrárias damos o nome de **integral geral** numa equação diferencial ordinária de ordem n . Este integral geral traduz-se por uma família de soluções com o único requisito de ter tantas constantes arbitrárias como a ordem da equação. Experimentemos assim verificar se a função $y = \cos^2 x$ é solução diferencial ordinária $y'' + y' = 0$. Não resolvendo a equação até à solução, temos a Equação 59:

solução particular

integral geral

$$y = \cos^2 x \Rightarrow y' = 2 \cos x (-\sin x) \Rightarrow y'' = -2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

equação 59

dado isto:

$$\begin{aligned} y'' + y' &= 0 \Leftrightarrow -2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}, \quad \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

■

Como podemos reparar a possível solução verifica-se para pontos isolados, mas não para um intervalo aberto. Sendo assim, $y = \cos^2(x)$ não é solução para a equação diferencial ordinária $y'' + y' = 0$. Verifiquemos agora se $y = Cx - C^2$, com c real, é solução de $(y')^2 - xy' + y = 0$ (Equação 60).

$$\begin{aligned} y &= Cx - C^2 \quad \Rightarrow \quad y' = C, \quad C \in \mathbb{R} \\ C^2 - xC + Cx - C^2 &= 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

equação 60

■

A “solução” verifica-se, resultando numa proposição verdadeira, por $0=0$. Neste caso não temos propriamente uma solução, mas antes uma família de soluções.

Consideremos agora a equação diferencial ordinária $(y')^2 = 1$. Resolvendo esta equação diferencial temos que se $(y')^2 = 1$, então $y' = \pm 1$, isto é, $y = \pm x + C$, com x real e C real. Às equações do desenvolvimento de $y = \pm x + C$ damos o nome de integrais gerais, como já verificámos anteriormente. Gráficamente, ao integral geral $y = x + C$, com x e C reais, podemos criar as seguintes curvas de integral geral (Figura 16).

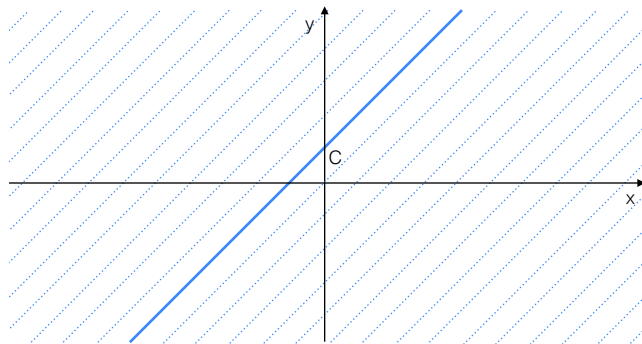


figura 16

integral geral

Denote-se o conjunto de retas da Figura 16 da forma $y = x + C$, com declive igual a 1 e ordenada na origem igual a C . Para o integral geral $y = -x + C$, temos a família de soluções da Figura 17.

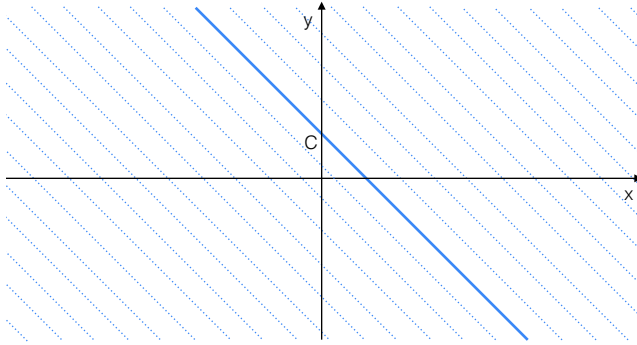


figura 17
integral geral

Mas se verificarmos melhor, do passo de resolução “se $(y')^2 = 1$, então $y' = \pm 1$ ” nós podemos obter declives $+1$ para determinados intervalos e -1 , para outros intervalos. Neste caso, essa alternância é ilegal, dado que executá-la é criar **pontos angulosos**, os quais possuem a característica de não ter derivada, isto é, a função perderá diferenciabilidade (Figura 18).

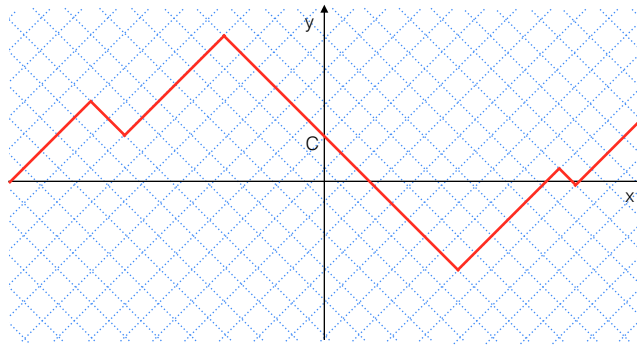


figura 18
integral geral

Convém assim definir **solução singular**, de uma equação diferencial ordinária relativamente a um integral geral, como uma solução particular da equação diferencial que não está contida na expressão do integral geral em causa.

Para uma equação diferencial como $(y')^2 + y^2 = 0$ o esperado talvez seja uma família de soluções, mas só há um valor para o qual a equação se verifica. Ainda mais, como consequência de operações algébricas, existem também equações sem qualquer solução, como $(y')^2 + 1 = 0$. Consideremos assim, novamente, a equação $(y')^2 = 1$. Como já verificámos se $(y')^2 = 1$, então $y' = \pm 1$, isto é, $y = \pm x + C$, com x real e C real. Na expressão não há uma indicação precisa do sinal a usar (tendo o símbolo “mais ou menos”, $\pm$). Mas se $(y')^2 = 1$, então $y' = \pm 1$, pelo que $y = \pm x + C$, isto é, $y - C = \pm x$, ou seja, $(y - C)^2 = x^2$. A este resultado damos o nome de **solução implícita** da equação diferencial ordinária. Estas soluções caracterizam-se por não conterem derivadas (solução). Sendo assim, faz também sentido em referir **integral geral implícito** e em **solução particular implícita** da equação diferencial ordinária. A Figura 19 mostra a solução obtida.

Outra definição, assim, é a de **solução particular explícita**, a qual indica uma das várias possibilidades indicadas pela solução particular implícita (como a da Figura 19).

solução singular

solução implícita

integral geral implícito,
solução particular implícita
solução particular explícita

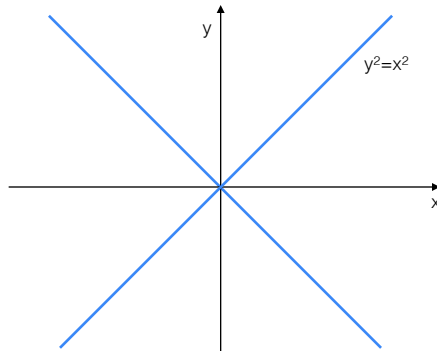


figura 19
solução particular implícita

Problemas de valor inicial e equações de variáveis separáveis

Na instrumentação de um problema relacionado com equações diferenciais é possível gerar um enquadramento de casos particulares. Através da explicitação de valores iniciais podemos designar soluções de equações diferenciais. Cria-se assim os **problemas de valores iniciais** (também abreviados de PVI) ou também chamados de **problemas de Cauchy**. A formalização da base destes problemas está em Equação 61.

© Augustin-Louis Cauchy
problemas de valores iniciais
problemas de Cauchy

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

equação 61

Os problemas de valores iniciais formalizados na Equação 61 contêm constantes dadas, representadas por $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$. Até ao momento já referimos, pelo menos, duas vezes no nosso estudo, problemas deste tipo. Na Equação 62 estão as duas vezes que precisámos de os ter em conta.

$$\begin{cases} y' + 2y = e^t \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = -9.8 - y' \\ y(0) = 10, y'(0) = 0 \end{cases}$$

equação 62

Como podemos verificar através da Equação 62, para a equação de ordem 1 temos 1 valor inicial e para a equação de ordem 2 temos dois valores iniciais.

Para resolver equações diferenciais, primeiro, vejamos o seguinte método, considerando sempre a forma normal de uma equação diferencial ordinária, sobre a qual $y' = f(x, y)$, com x sendo a variável independente e y a variável dependente. Para prosseguirmos consideremos equações diferenciais ordinárias de variáveis **separáveis** (ou separadas) como as representadas na Equação 63.

separáveis

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)} \text{ (separável) } \quad \text{ou} \quad q(y)y' = p(x) \text{ (separada)}$$

equação 63

Partindo de $q(y)y' = p(x)$, temos que $y = \phi(x)$ será solução desta equação diferencial ordinária se e só se $q(\phi(x))\phi'(x) = p(x)$ se verificar. Se tiver solução, se primitivarmos o membro esquerdo da equação, o conjunto das primitivas do primeiro

membro tem de ser igual ao conjunto das primitivas do segundo membro (direito), como podemos verificar na Equação 64.

$$q(\varphi(x))\varphi'(x) = p(x) \Rightarrow \int q(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int p(x)dx \quad \text{equação 64}$$

Se assumirmos que $y = \varphi(x)$ e que $\varphi'(x)dx = dy$, então temos uma restrição do primeiro membro de y em $\varphi(x)$, como mostra a Equação 65.

$$\Leftrightarrow \int q(y)dy \Big|_{y=\varphi(x)} = \int p(x)dx \quad \text{equação 65}$$

Se $P(x)$ for uma primitiva de $p(x)$ e $Q(y)$ for uma primitiva de $q(y)$, então verifica-se a Equação 66.

$$\Leftrightarrow Q(\varphi(x)) = P(x) + c, \quad \text{em intervalos} \quad \text{equação 66}$$

Se soubermos inverter Q , podemos prosseguir com a Equação 67.

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = Q^{-1}(P(x) + c) \quad \text{equação 67}$$

Se conseguirmos garantir que a Equação 66 é equivalente à Equação 64 (partida), então a Equação 67 é uma solução explícita e a Equação 66 é uma solução implícita.

De forma sumariada: tendo uma equação na forma $q(y)y' = p(x)$ rescrevemos com a forma da Equação 68;

$$q(y)\frac{dy}{dx} = p(x) \quad \text{equação 68}$$

prosseguindo para a forma de $q(y)dy = p(x)dx$ podemos passar para a Equação 69;

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx \quad \text{equação 69}$$

sendo esta última a solução implícita, agora só falta mesmo resolver a equação em ordem a y para obter soluções explícitas.

Consideremos assim a equação diferencial $y' = y^2$. Esta equação, já na forma normal, pode ser enquadrada na forma da Equação 64 tendo $q(y) = 1/y^2 = y^{-2}$, e tendo $p(x) = 1$. Assim, passando para a forma da Equação 68, temos a Equação 70.

$$\frac{1}{y^2}y' = 1, \quad y \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}dy = dx \quad \text{equação 70}$$

Passando para a forma primitivada da Equação 69, temos a Equação 71.

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int 1dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x + C, \quad C \in \mathbb{R}, y \neq 0 \quad \text{equação 71}$$

De forma explícita temos assim a Equação 72.

$$y = -\frac{1}{x+C}, y \neq 0, C \in \mathbb{R}$$

equação 72

Observando a expressão inicial podemos verificar que embora a solução exclua $y = 0$, substituindo $y = 0$ em $y' = y^2$ temos que $0 = 0$, pelo que há solução para este caso também. Graficamente, podemos representar as soluções (a azul) da seguinte forma (Figura 20), com $C > 0$ e real.

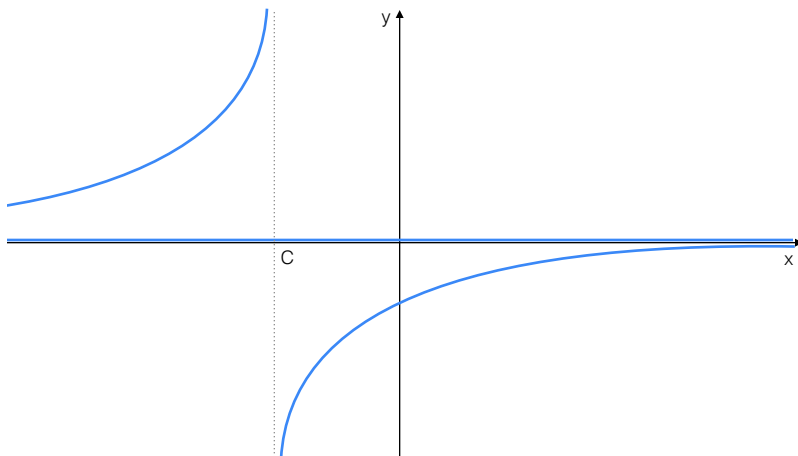


figura 20
soluções de EDO

Se este problema fosse com valor inicial igual a zero, isto é, se $y(0) = 0$, teríamos apenas uma solução (esta, $y = 0$), pois no gráfico da Figura 20 podemos verificar que só nesse ponto é que é possível a solução. Já se o nosso valor inicial fosse -1 , para que valores de X é que existia solução? Sendo y a expressão $-1/(x+1)$ temos que o C tem de ser 1 para que $y(0) = -1$. Verificando os intervalos, temos que apenas há uma solução para o intervalo de $]-1, \infty[$, dado que para o intervalo do integral geral $]-\infty, -1[$ não existe solução.

Equações lineares de primeira ordem

Uma **equação linear de primeira ordem** é uma expressão com a forma da Equação 73.

equação linear de primeira
ordem

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x), \quad a_0, a_1, b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$$

equação 73

nota!! em Equação 73 I significa intervalo aberto.

nota

Mas porquê linear? Interpretando por geometria analítica, temos que isto corresponde a uma expressão do tipo $Ax + By = C$, o que graficamente se faz representar por retas. Vejamos assim um exemplo de equação diferencial ordinária não linear: $(y')^2 = 1$ - esta equação não é linear porque o valor de a_0 não depende de x , mas antes apenas de y . Podemos também escrever as equações diferenciais ordinárias lineares sob a forma visível em Equação 74.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

equação 74

nota!! realizada dividindo a Equação 73 por a_0 , não há qualquer relação entre os significados de $p(x)$ e $q(x)$ da Equação 63 e da Equação 74.

Assim, estudemos um método para a resolução deste tipo de equações. Consideremos a Equação 74. A técnica que vamos usar parte de uma analogia entre o primeiro membro da Equação 74 e a expressão da derivada do produto, como podemos ver em Equação 75.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

equação 75

Na Equação 75, em comparação com a Equação 74, temos que $f'(x)$ é equivalente a y' e que $f(x)$ é equivalente a y . Mas isto não nos leva propriamente a nenhuma conclusão. Será que é possível multiplicar a Equação 74 por uma função $\mu(x) \neq 0$, tal que a Equação 76 se verifique e o primeiro membro desta, isto é, o membro $\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y$, é igual à expressão da derivada do produto de $\mu(x)y$?

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

equação 76

Se Equação 76 for possível, então a equação diferencial ordinária é equivalente a $(\mu(x)y)' = \mu(x)q(x)$, pelo que se verifica a Equação 77.

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx$$

equação 77

Por esta técnica será sempre possível encontrar uma função $\mu(x)$ que favoreça às condições apresentadas. Mas como é que podemos encontrar $\mu(x)$? Se verificarmos melhor, a Equação 76 é equivalente ao seguinte desenvolvimento da Equação 78.

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \Leftrightarrow \mu'(x) = \mu(x)p(x), \quad y \neq 0$$

equação 78

$$\Leftrightarrow \frac{d\mu}{dx} = p(x)\mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} d\mu = p(x)dx, \quad \mu \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\mu} d\mu = \int p(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|\mu| = \int p(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|\mu| = P(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |\mu| = e^{P(x)+c}$$

$$\Leftrightarrow \mu = \pm e^{P(x)} e^c$$

$$\Leftrightarrow \mu = c_1 e^{P(x)}, \quad c_1 = \pm e^c$$

Inicialmente tivemos que $c_1 \neq 0$, embora para $c_1 = 0$ tenhamos que $\mu = 0$, o que também é solução para a Equação 76 - embora não seja, de todo, relevante para o nosso estudo, porque no início consideramos que $\mu \neq 0$. Geralmente, como só precisamos de uma função μ , escolhe-se $c_1 = 1$, isto é, $\mu = e^{P(x)}$ - só precisamos de uma

função que nos resolva o problema (escolhemos o valor 1 por uma questão de simplicidade). A $\mu = e^{P(x)}$ chamamos de **fator integrante**³ da equação diferencial ordinária linear.

fator integrante

Consideremos, assim, a equação diferencial ordinária $y' - y = -e^x$. A primeira coisa a concretizar é que uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, a forma da Equação 74. Dado isto, podemos atribuir a $p(x)$ o valor de -1 e a $q(x)$ o valor de $-e^x$. Usando o último conceito abordado (fator integrante), temos que este será o mostrado na Equação 79.

$$\mu = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$$

equação 79

Se multiplicarmos a equação pelo fator integrante, obtemos a seguinte Equação 80 equivalente.

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -e^{-x}e^x \Leftrightarrow e^{-x}y' - e^{-x}y = -1$$

equação 80

Pela Equação 77, temos que há equivalência com a Equação 81.

$$\begin{aligned}(e^{-x}y)' &= -1 \Leftrightarrow e^{-x}y = -x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow y &= e^x(c - x)\end{aligned}$$

equação 81

Na resolução de um exercício deste género, do passo de execução explícito na Equação 80 para a explícita na Equação 81, é importante referir que se pode obter uma equação com uma complexidade algo elevada, pelo que já tendo conhecimento do procedimento teórico abordado é possível escrever a solução diretamente.

Tentemos assim resolver a seguinte equação em Equação 82.

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2+1}y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, \quad x \neq 0$$

equação 82

Primeiro, há que verificar se a nossa expressão se encontra na forma da Equação 74. Neste caso não se pode verificar isso, dado que temos $(1/x)$, no primeiro membro da equação. Para tal, há que multiplicar toda a equação por x , de forma a que consigamos manter apenas y' , como explícito em Equação 83.

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2+1}y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \therefore y' - \frac{x}{x^2+1}y = \sqrt{x^2+1}$$

equação 83

Pela Equação 83 podemos enquadrar as funções $p(x)$ e $q(x)$ como $-x/(x^2 + 1)$ e $\sqrt{x^2 + 1}$, respetivamente. Primitivando $p(x)$, para o cálculo do fator integrante, temos a Equação 84:

$$\int -\frac{x}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) = -\ln \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \mu = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

equação 84

³ Em Equação 78, $P(x)$, tal como na expressão para o fator integrante, corresponde a uma primitiva de $p(x)$.

Substituindo $\mu(x)$ por $(x^2 + 1)^{1/2}$ temos o desenvolvimento até à solução em Equação 85.

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} y' - \frac{x}{x^2 + 1} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} y &= \sqrt{x^2 + 1} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} y' - \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} y = 1 & \text{equação 85} \\ \Leftrightarrow \left((x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} y \right)' &= 1 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} y &= x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow y &= (x + c) \sqrt{x^2 + 1}, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Equações diferenciais ordinárias homogêneas

Até ao momento já temos três formas de resolver equações diferenciais: uma é através de transformadas de Laplace (método passível de aplicar para equações de ordem superior a 1), através de variáveis separáveis ou através do método abordado com equações diferenciais lineares de primeira ordem. Agora, vamos estudar novos métodos, estes, que transformam uma equação de uma forma que ainda não abordámos em equações de formas já conhecidas. A esta nova forma ainda não abordada damos o nome de **equações diferenciais homogêneas**, as quais têm a forma formalizada na Equação 86, sendo $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$.

**equações diferenciais
homogêneas**

$$y' = f(x, y), \quad \text{onde } f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in D_f, \quad \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x, \lambda y) \in D_f \quad \text{equação 86}$$

Assim, consideremos uma função $f(x, y)$ com um $\lambda = (1/x)$. A partir da Equação 86 podemos transformar a equação numa segunda com uma só variável (Equação 87).

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad z = \frac{y}{x} \Rightarrow f(1, z) =: g(z) \quad \text{equação 87}$$

Dado o desenvolvimento, ficamos com $y' = g(z)$. Mas, no fundo, a Equação 87 depende de três variáveis: z e x , y (x porque y' é derivada em ordem a x). Sendo assim, o objetivo será reduzir a nossa lista de variáveis, que atualmente é (x, y, z) , para uma lista mais pequena apenas com (x, z) , eliminando y . Assim, resolvemos da seguinte forma (Equação 88).

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d(xz)}{dx}, \quad y = xz \rightarrow z + x \frac{dz}{dx} = g(z) \quad \text{equação 88}$$

Mais concretamente, ficamos com $g(z) = z + xz'$, isto é, $xz' = g(z) - z$, o que é uma equação de variáveis separadas, pelo que (Equação 89):

$$\frac{1}{g(z) - z} dz = \frac{1}{x} dx, \quad x \neq 0, \quad g(z) \neq z \quad \text{equação 89}$$

Resolvendo esta última, devemos multiplicar por x (dada a mudança de variável $y = xz$), de forma a obter solução para a equação diferencial original.

Consideremos o seguinte exemplo, no qual tentaremos resolver a equação diferencial $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$. Primeiro devemos passar a equação para a forma da Equação 86. Dado isso, dividindo por x^2 temos que (Equação 90):

$$x^2 y' = x^2 + xy + y^2 \Leftrightarrow y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \quad \text{equação 90}$$

Não sendo necessário, apenas por motivos meramente académicos, comprovemos se a Equação 90 é, de facto, uma equação diferencial homogénea (Equação 91).

$$f(\lambda x, \lambda y) = 1 + \frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{\lambda y^2}{\lambda x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = f(x, y) \quad \text{c.q.d.} \quad \text{equação 91}$$

Mudando para a nossa variável $z = y/x$, isto é, $y = xz$, temos que $y' = z + xz'$. Assim, ficamos com o seguinte resultado (Equação 92).

$$z + xz' = 1 + z + z^2 \quad \text{equação 92}$$

Desenvolvendo para uma equação diferencial ordinária com as variáveis separadas, temos que (Equação 93):

$$\begin{aligned} z + xz' = 1 + z + z^2 &\Leftrightarrow x \frac{dz}{dx} = 1 + z^2 && \text{equação 93} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{x} dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx \\ &\Leftrightarrow \arctan z = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \arctan \frac{y}{x} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Uma outra forma possível de apresentar uma equação diferencial ordinária é através da forma em Equação 94.

$$y' = h\left(\frac{a_1 x + b_1 x + c_1}{a_2 x + b_2 x + c_2}\right) \quad \text{equação 94}$$

Resolver este tipo de equações é transformá-las em equações diferenciais ordinárias de outras formas, passíveis de dividir em dois possíveis casos (Equação 95)⁴.

$$(a) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (b) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{equação 95}$$

⁴ Em Equação 95 [...] representa o determinante da matriz, sendo que $|(a)| = 0$ é equivalente a $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Para o caso em (a) ou a equação é de variáveis separáveis ou a mudança de variável $z = a_1x + b_1y$ ou $z = a_2x + b_2y$ converte-se numa equação diferencial de variáveis separáveis. Tendo $b_1y = z - a_1x$, ficamos com a Equação 96.

$$y = \frac{z}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}x$$

equação 96

Da parte derivada de z , ficamos com a Equação 97.

$$z' = a_1 + b_1y' \Leftrightarrow b_1y' = z' - a_1 \Leftrightarrow y' = \frac{z'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}$$

equação 97

Assim, ficamos com a transformação seguinte (Equação 98):

$$\frac{1}{b_1}z' - \frac{a_1}{b_1} = h \left(\frac{a_1x + z - a_1x + c_1}{a_2x + b_2 \left(\frac{z}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}x \right) + c_2} \right)$$

equação 98

Para o caso da alínea (b) da Equação 95 temos que existem α e β , ambos pertencentes a $\mathbb{R}$, tais que as mudanças de variável $x = u + \alpha$ e $y = v + \beta$ transforma a equação em Equação 94 numa equação diferencial ordinária homogênea - diz-se então que a equação diferencial é **redutível a homogênea**. Mas como calcular α e β ? As constantes reais α e β são soluções do sistema da Equação 99, sempre possível e determinado.

redutível a homogênea

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

equação 99

Este sistema em Equação 99 é possível e determinado porque a matriz, sendo quadrada, tem sempre solução se o determinante for diferente de zero - condição de partida para a nossa abordagem. Consideremos assim a seguinte equação (Equação 100).

$$y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$$

equação 100

Primeiro há que calcular o determinante para saber qual dos casos (a) ou (b), da Equação 95, havemos de seguir (Equação 101).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 (\neq 0)$$

equação 101

Sendo diferente de zero, resolvemos o sistema da Equação 99, aplicado ao exercício, na Equação 102, somando as duas equações do sistema e calculando o valor das duas incógnitas α e β .

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 4 = 0 \\ \alpha - \beta - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 1 + \beta + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -5 \end{cases}$$

equação 102

Assim, a nossa mudança de variável será $x = u + 1$ e $y = v - 5$. Comparando diversas aplicações, temos que de $u \mapsto x = u + 1 \mapsto y = y(x) = y(u + 1) \mapsto v(u) = y(u + 1) + 5$. Sabendo que $y' = dy/dx$ e $v' = dv/du$, com a regra da cadeia, temos a Equação 103.

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = \frac{dv}{dx} \cdot 1 = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot 1 = \frac{dy}{dx}$$

equação 103

Substituindo de acordo com a Equação 94, temos a Equação 104:

$$v' = \frac{u + 1 + v - 5 + 4}{u + 1 - v + 5 - 6} = \frac{u + v}{u - v}$$

equação 104

Dado que usamos a Equação 99, temos que esta expressão dá sempre uma equação diferencial homogênea. Mudando a nossa variável para um $z = v/u$, com $u \neq 0$ temos que $v = uz$, pelo que a derivada $v' = z + uz'$. Substituindo, uma vez mais, temos a Equação 105.

$$\begin{aligned} v' = \frac{u + v}{u - v} &\Leftrightarrow z + uz' = \frac{u + uz}{u - uz} \\ &\Leftrightarrow uz' = \frac{u(1 + z)}{u(1 - z)} - z \\ &\Leftrightarrow u \frac{dz}{du} = \frac{1 + z - z + z^2}{1 - z} \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \frac{1}{u} du \end{aligned}$$

equação 105

Tendo a equação diferencial com variáveis separadas, prosseguindo com o método abordado, temos (Equação 106):

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{u} du \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{1 + z^2} dz - \int \frac{z}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{u} du \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{1 + z^2} dz - \frac{1}{2} \int \frac{2z}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{u} du \\ &\Leftrightarrow \arctan z - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) = \ln|u| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \arctan\left(\frac{y+5}{x-1}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{(y+5)^2}{(x-1)^2}\right) = \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

equação 106

■

Equações diferenciais ordinárias de Bernoulli

As equações diferenciais de **Bernoulli** são todas as equações com a forma da Equação 107.

Bernoulli

© Daniel Bernoulli

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, 1$$

equação 107

nota!! coloca-se a condição que $\alpha \neq \{0, 1\}$, porque se $\alpha = 0$ fica linear e se $\alpha = 1$ fica uma equação de variáveis separadas.

nota

Dividindo ambos os membros da equação em Equação 107, para retirar y^α do segundo membro (Equação 108).

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

equação 108

Se considerarmos $y^{1-\alpha} = z$, temos que $z' = (1 - \alpha)y^\alpha \cdot y'$ (pela regra da cadeia y depende de x). A mudança de variável dá então origem a $(z' / (1 - \alpha)) + a(x)z = b(x)$, o que se traduz por uma equação diferencial ordinária linear em x e em z , de primeira ordem (com $x \neq 1$).

Equações lineares de ordem n , arbitrária

Uma **equação linear de ordem n** , com $n \in \mathbb{N}$, é uma equação da forma da Equação 109, onde $a_0, a_1, \dots, a_n, b$ são funções contínuas num certo intervalo I , com $a_0(x) \neq 0$, para todo $x \in I$.

equação linear de ordem n

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

equação 109

As funções a_j da Equação 109, com $j = 0, 1, \dots, n$, dizem-se os **coeficientes da equação** (Equação 109). Se todos estes coeficientes forem funções constantes (no intervalo I), então a equação diz-se de **coeficientes constantes**.

coeficientes da equação
coeficientes constantes

Mantendo a terminologia anteriormente usada para as equações de primeira ordem, a Equação 109 dir-se-á homogênea (ou incompleta) quando b representa a função nula, isto é, $b(x) = 0$, dado que, caso contrário, a equação linear diz-se completa (ou não homogênea).

Aquando da abordagem de problemas de valor inicial (ou problemas de Cauchy) não referimos um resultado muito importante, com o qual podemos inferir que se p e q são funções contínuas num intervalo I , fechado, então o problema de Cauchy da Equação 110 tem nesse intervalo uma e uma só solução. A esta informação damos o nome de teorema da **existência e unicidade de solução global**.

existência e unicidade da
solução global

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

equação 110

No fundo, este último resultado da Equação 110 pode ser aplicado para equações de ordem superior a 1, pelo que se $a_0, a_1, \dots, a_n, b$ forem funções contínuas num intervalo I , com $a_0(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, então, nesse intervalo, existe uma e

uma só solução para o problema de Cauchy de Equação 111, onde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ são números reais dados.

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases} \quad \text{equação 111}$$

Quando abordámos equações diferenciais ordinárias de primeira ordem tivemos oportunidade de discutir um método de resolução baseado em fatores integrantes para equações lineares de primeira ordem. Agora, para uma ordem arbitrária, não é difícil mostrar que dadas duas soluções da Equação 109: a sua diferença é solução da equação homogénea a si associada (igual, só que com $b(x) = 0$); a soma de uma solução da Equação 109 com uma solução da equação homogénea associada é também solução da Equação 109. A partir destas informações, podemos abordar a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear completa, a qual se obtém adicionando uma qualquer sua solução à solução geral da equação homogénea associada. Este teorema diz-nos assim que a solução geral de uma equação linear completa é dada por Equação 112, onde y_p é a solução particular da equação diferencial e y_h é solução geral da homogénea associada.

$$y = y_p + y_h \quad \text{equação 112}$$

Dado isto e por vias de outro teorema, se a equação diferencial homogénea de ordem $n \in \mathbb{N}$ tiver coeficientes contínuos num intervalo I , então existem soluções como a apresentada em Equação 113 (a), linearmente independentes em I e a solução geral é Equação 113 (b).

$$\begin{aligned} y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) & \quad \text{(a)} \\ y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) & \quad \text{(b)} \end{aligned} \quad \text{equação 113}$$

Em termos práticos só precisamos de achar n soluções, linearmente independentes, para resolver este tipo de problema. Ao conjunto de soluções de Equação 113 (a), visível em Equação 114 é dado o nome de **sistema fundamental** da solução da equação diferencial ordinária.

sistema fundamental

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\} \quad \text{equação 114}$$

Em relação à independência linear, revendo a disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica (als1), temos que se diz que Equação 113 (a) são linearmente independentes num intervalo I se nenhuma se puder escrever como combinação linear das restantes em I . Para verificar a independência linear podemos usar o seguinte critério: sendo a Equação 113 (a) soluções de uma equação diferencial ordinária homogénea de ordem $n \in \mathbb{N}$ e de coeficientes contínuos em I , há independência linear em I se e só se o determinante de Equação 115 for diferente de zero, para algum $x \in I$ (e nesse caso é diferente de zero para todos os x do intervalo I).

Ao determinante da Equação 115 damos o nome de **Wronskiano** - em homenagem a Józef Wronski, matemático e filósofo polaco - daí a designação de W .

Wronskiano
 © Józef Wronski

$$W(y_1, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

equação 115

Anteriormente verificámos que e^{-x} e e^{2x} são soluções de $y'' - y' - 2y = 0$. Verificando com o Wronskiano temos que (Equação 116):

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^x + e^x = 3e^x \neq 0 \therefore$$

equação 116

$$\therefore \{e^{-x}, e^{2x}\} \text{ é sistema fundamental}$$

Em termos práticos, estes passos de execução não costumam ser utilizados. Estas execuções são realizadas, habitualmente, para demonstrações teóricas e evidências matemáticas.

EDOs homogéneas lineares de ordem n com coeficientes constantes

Recordando a expressão geral de uma equação diferencial ordinária de ordem $n \in \mathbb{N}$ com coeficientes constantes, onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$, temos a Equação 117.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

equação 117

Para calcularmos uma solução para uma equação homogénea devemos procurar descobrir as raízes da **equação caraterística**, pela qual obtemos a seguinte expressão da Equação 118.

equação caraterística

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

equação 118

Na Equação 118 designa-se o primeiro membro da expressão como o polinómio caraterístico. Desenvolvendo a expressão de forma a encontrar os valores de r (raízes do polinómio), vejamos quatro situações que podem ocorrer como solução da equação homogénea linear de ordem $n \in \mathbb{N}$, para os diversos resultados de raízes da equação caraterística:

- se r for uma raiz simples, considera-se a seguinte solução (Equação 119):

$$e^{rx}$$

equação 119

- se r for um conjunto de raízes múltiplas da equação caraterística, consideram-se as seguintes soluções e raízes ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$) de multiplicidade $m \in \{2, \dots, n\}$:

$$e^{rx}, x e^{rx}, x^2 e^{rx}, \dots, x^{m-1} e^{rx}$$

equação 120

- se as raízes forem da forma dos pares $\alpha \pm i\beta$ (α, β reais) - de raízes complexas simples -, consideram-se as seguintes soluções (Equação 121):

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

equação 121

- se as raízes forem um conjunto de pares de raízes complexas conjugadas $\alpha_1 \pm i\beta_1 = \alpha_2 \pm i\beta_2 = \dots = \alpha_m \pm i\beta_m (= \alpha \pm i\beta)$, por cada um dos pares, com m assumindo a multiplicidade $m \in \{2, \dots, n/2\}$ (dado que trabalhamos em pares), consideram-se as seguintes soluções (Equação 122):

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

equação 122

Dadas estas últimas regras, a solução geral da equação diferencial ordinária obtém-se como a combinação linear de todas as funções consideradas anteriormente.

Vejamos, se pretendermos resolver a equação $y''' + 4y'' - 5y' = 0$, primeiro, teríamos de resolver a respetiva equação característica $r^3 + 4r^2 - 5r = 0$, pela qual obteríamos $r = 0 \vee r = -5 \vee r = 1$. Assim, a solução geral, de acordo com a conclusão que obtivemos no final da enunciação das regras, é a combinação linear das soluções obtidas pelas raízes simples $r = 0$, $r = -5$ e $r = 1$, ficando assim com a equação final da Equação 123.

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-5x} + c_3 e^x = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^x$$

equação 123

EDOs lineares completas de ordem n com coeficientes constantes

Consideremos um primeiro exemplo, usando a equação diferencial ordinária da Equação 124.

$$y'' - 2y' + y = e^{-x}$$

equação 124

Neste novo método que iremos abordar é apenas útil que no lugar de e^x se encontre uma função exponencial, uma função seno, uma função cosseno, uma função polinomial ou possíveis combinações entre estas enumeradas. O ideal para resolver expressões como as de Equação 124 seria ter uma aproximação de $y = e^x$. Com muita sorte até poderíamos obter um resultado desses, mas dada a abordagem, podemos tentar encontrar solução para a Equação 124 tendo em conta um $A \in \mathbb{R}$, sendo que $y = Ae^x$. Sendo assim, para calcular a solução teríamos a Equação 125.

$$Ae^{-x} + 2Ae^{-x} + Ae^{-x} = e^{-x}$$

equação 125

Prosseguindo o desenvolvimento de Equação 125, se dividirmos ambos os membros da equação por e^x , conseguimos obter uma solução particular: $4A = 1 \Leftrightarrow A = 1/4$. Tendo a equação particular $y_p = (1/4)e^x$ e tendo visto anteriormente que $y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$, temos que, por via de Equação 112, podemos escrever a expressão geral como explícito em Equação 126.

Infelizmente este método nem sempre funciona. Denominado de **método dos coeficientes indeterminados**, mais à frente veremos um caso para o qual falha.

método dos coeficientes indeterminados

$$y = \frac{1}{4}e^{-x} + c_1e^x + c_2xe^x$$

equação 126

Embora falhe para alguns casos, um dos casos para o qual este método dos coeficientes indeterminados é infalível, é para a resolução da Equação 127.

$$y'' - 2y' + y = \sin x$$

equação 127

Será que a abordagem deste último método estudado funciona e podemos, assim, procurar $y = A \sin(x)$? Aqui é mais complicado, porque nas derivações $\sin(x)$ vai claramente oscilar entre as funções de cosseno e seno. No entanto, se tomarmos o desenvolvimento de $y = A \sin(x) + B \cos(x)$, temos que a primeira derivada será $y' = A \cos(x) - B \sin(x)$ e a segunda derivada será $y'' = -A \sin(x) - B \cos(x)$. Sendo assim, substituindo temos a Equação 128.

$$\begin{aligned} -A \sin x - B \cos x - 2A \cos x + 2B \sin x + A \sin x + B \cos x &= \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2A \cos x + 2B \sin x &= \sin x \end{aligned}$$

equação 128

Agora, tal como na igualdade de polinómios, os coeficientes têm de igualar, pelo que (Equação 129):

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 1 \\ -2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

equação 129

Substituindo os coeficientes, temos que a nossa solução particular y_p será (Equação 130):

$$y_p = \frac{1}{2} \cos x$$

equação 130

Tendo a solução da equação homogénea $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$, temos que, por Equação 112, a solução geral é a Equação 131.

$$y = \frac{1}{2} \cos x + c_1e^x + c_2xe^x$$

equação 131

Como referido atrás, há casos para os quais este método não pode ser aplicado. Por exemplo, considerando a equação $y'' - 2y' + y = e^x$, será possível obter um $y = Ae^x$? Se verificarmos a nossa solução homogénea (a mesma que anteriormente) iremos reparar que será a solução particular, desenvolvendo $y = Ae^x$. Este é um dos casos para o qual não podemos seguir esta abordagem.

Tentemos assim verificar a seguinte afirmação: se $y_1(x)$ é solução de $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b_1(x)$ e se $y_2(x)$ é solução de $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b_2(x)$, então $y_1(x) + y_2(x)$ é solução de $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b_1(x) + b_2(x)$. Se substituirmos y por $y_1(x) + y_2(x)$ vejamos o que obtemos como informação (Equação 132).

$$\begin{aligned}
 & a_0(x)(y_1(x) + y_2(x))'' + a_1(x)(y_1(x) + y_2(x))' + a_2(x)(y_1(x) + y_2(x)) = \\
 & = a_0(x)y_1''(x) + a_0(x)y_2''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_1(x) + a_2(x)y_2(x) = \\
 & = a_0(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) + a_0(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) = \\
 & = b_1(x) + b_2(x)
 \end{aligned}$$

equação 132

Pelo exercício anterior podemos ver que, a partir deste momento, já conseguimos resolver as equações cujos termos independentes, somados, resultam na soma das equações para as quais cada uma é solução. A este princípio damos o nome de **princípio da sobreposição**. Este método é assim válido para equações diferenciais ordinárias de ordem $n \in \mathbb{N}$.

princípio da sobreposição

Voltando atrás, como é que é possível arranjar uma solução para a equação $y'' - 2y' + y = e^x$? Como já verificámos, pelo método dos coeficientes indeterminados não é possível obter solução por $y_p = Ae^x$, dado que atinge uma solução da equação homogénea associada. Se tentarmos para um $y_p = Axe^x$ o mesmo iria acontecer, mas para $y_p = Ax^2e^x$ já não aconteceria o mesmo. Cumprindo as derivadas necessárias, temos que $y_p = Ax^2e^x$, a primeira derivada é $y_p' = Ax^2e^x + 2Axe^x$ e que a segunda derivada é $y_p'' = Ax^2e^x + 2Axe^x + 2Axe^x + 2Ae^x$. Assim, substituindo na equação original temos a Equação 133:

$$\begin{aligned}
 & Ax^2e^x + 2Axe^x + 2Axe^x + 2Ae^x - 2(Ax^2e^x + 2Axe^x) + Ax^2e^x = e^x \\
 & \Leftrightarrow Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x - 2Ax^2e^x - 2A2xe^x + Ax^2e^x = e^x \\
 & \Leftrightarrow Ax^2 + 4Ax + 2A - 2Ax^2 - 4Ax + Ax^2 = 1 \\
 & \Leftrightarrow 4Ax + 2A - 4Ax = 1 \\
 & \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

equação 133

Tendo identificado A como $(1/2)$, podemos agora escrever Equação 134:

$$y = \frac{1}{2}x^2e^x + c_1e^x + c_2xe^x$$

equação 134

Este método é denominado, como já referimos anteriormente, de método dos coeficientes indeterminados, o qual se aplica, sendo assim, aquando da determinação de uma solução particular de equações diferenciais ordinárias do tipo de Equação 109, onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ e $b(x)$ tem uma das duas formas de Equação 135 ((a) ou (b)), onde $P_m(x)$ é um polinómio de grau m (podendo ser 0 - sendo assim designado constante) e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$P_m(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad (a)$$

equação 135

$$P_m(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (b)$$

Por exemplo, $e^x = b(x)$ pode ser escrita com a forma de Equação 135 (a) com $m = 0, \alpha = 1, \beta = 0$ ou com a forma de Equação 135 (b) com $m = 0, \alpha = 1, \beta = 1$.

Assim, existe uma solução particular com a forma de Equação 136.

$$y_p = x^k e^{\alpha x} (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x))$$

equação 136

Em Equação 136, $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios de grau m ou inferior com coeficientes a determinar, com $k \in \mathbb{N}_0$ sendo a multiplicidade do complexo $\alpha \pm i\beta$ como raiz do polinómio caraterístico da equação diferencial ordinária homogénea a si associada - o valor de k é 0 se o complexo $\alpha \pm i\beta$ não for raiz desse polinómio caraterístico.

Tentemos assim resolver a seguinte equação diferencial: $y'' - y' - 2y = 4x^2$. Tendo resolvido anteriormente a equação homogénea associada, obtendo a solução $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$. Pela abordagem anterior temos que, escrevendo $4x^2$ com a forma de Equação 135 (a), designando $m = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, obtemos $\alpha \pm i\beta = 0$. Verificando se 0 é raiz da equação caraterística negamos essa afirmação, pelo que o valor de k será 0. Dado isto, temos que (Equação 137).

$$y_p = P(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{com } a, b, c \text{ a determinar}$$

equação 137

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

Substituindo temos (Equação 138):

$$2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 4 \\ -2a - 2b = 0 \\ 2a - b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

equação 138

Dado isto a solução geral será (Equação 139):

$$y = -2x^2 + 2x - 3 + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

equação 139

Método da variação das constantes

Para alguns casos, o método de resolução por coeficientes indeterminados não é possível ser aplicado, de forma a chegar a um resultado final. Nesses casos podemos usar o **método da variação das constantes**, método o qual passaremos a estudar a partir deste momento.

método da variação das constantes

Se recordarmos a resolução realizada em §§Equações lineares de primeira ordem, da Equação 74, temos que esta é representável em Equação 140, onde $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$ e $p(x)$ e $q(x)$ são ambas funções contínuas.

$$y = e^{-P(x)} \left(\int e^{P(x)} q(x) dx + c \right)$$

equação 140

Com a Equação 140 podemos observar que a solução geral da equação diferencial ordinária homogénea associada (isto é, quando $q(x) \equiv 0$) é Equação 141.

$$y = C \cdot e^{-P(x)}$$

equação 141

Comparando com a expressão inicial de Equação 141 passamos para a original, substituindo apenas C constante por uma função de x , como a Equação 142.

$$c + \int e^{P(x)} q(x) dx$$

equação 142

Por exemplo, considerando a seguinte equação (Equação 143), experimentemos aplicar este método da variação das constantes:

$$\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2 + 1} y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, \quad (x \neq 0)$$

equação 143

Aplicando o método da variação das constantes, temos que (Equação 144):

$$y' - \frac{x}{x^2 + 1} y = \sqrt{x^2 + 1}$$

equação 144

Para esta resolução, a solução da equação homogênea associada é a Equação 145:

$$y = C \cdot e^{\int \frac{x}{x^2 + 1} dx} = C \cdot e^{\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx} = C \cdot e^{\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} = C \cdot e^{\ln(\sqrt{x^2 + 1})} = C \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

equação 145

Dada a Equação 145, interessa-nos agora encontrar soluções da equação diferencial ordinária completa da forma seguinte (Equação 146).

$$y = C(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

equação 146

Para tal, averiguando a primeira derivada (Equação 147), substituímos na primeira equação (Equação 144) e temos a Equação 148.

$$y' = C'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + C(x) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

equação 147

$$\begin{aligned} C'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + C(x) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{x^2 + 1} \cdot C(x) \sqrt{x^2 + 1} &= \sqrt{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow C'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + C(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{x^2 + 1} \cdot C(x) \sqrt{x^2 + 1} &= \sqrt{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow C'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} &\Leftrightarrow C'(x) = 1 \Leftrightarrow C(x) = x + c \end{aligned}$$

equação 148

Sendo assim, a solução final será a Equação 149:

$$y = (x + c) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

equação 149

■

Usando este método não podemos saber se obtemos uma solução geral, pelo que, à partida, obtém-se, sim, uma solução particular útil para somar à solução da equação homogênea associada e obter a solução geral da equação completa.

Para ordens superiores a 1 como é que podemos aplicar este método? Vejamos assim, para equações lineares de ordem 2, como é que se processa o método da variação das constantes. Como sabemos, uma equação diferencial ordinária linear de ordem 2 tem a forma de Equação 150, onde $a_0(x) \neq 0, \forall x \in I$.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \quad \text{equação 150}$$

De Equação 150 já sabemos que a equação diferencial ordinária homogênea associada tem como solução geral Equação 151, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $\{\phi_1, \phi_2\}$ é um sistema fundamental dessa equação diferencial ordinária. Para resolver esta equação temos de procurar uma solução particular de Equação 150, da forma de Equação 151.

$$y_p = c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x) \quad \text{equação 151}$$

Resolvendo a primeira derivada temos que (Equação 152):

$$y'_p = c'_1(x)\phi_1(x) + c_1(x)\phi'_1(x) + c'_2(x)\phi_2(x) + c_2(x)\phi'_2(x) \quad \text{equação 152}$$

Como podemos prever, a segunda derivada terá o dobro dos termos de Equação 152, mas nós só precisamos de uma solução particular, pelo que se fizermos o segundo membro de Equação 151 igual a 0, talvez consigamos facilitar a segunda derivada, como podemos verificar pela Equação 153.

$$y''_p = c'_1(x)\phi'_1(x) + c_1(x)\phi''_1(x) + c'_2(x)\phi'_2(x) + c_2(x)\phi''_2(x) \quad \text{equação 153}$$

Sendo $c'_1(x)\phi'_1(x)$ semelhante a $c'_2(x)\phi'_2(x)$ é possível verificar solução particular para esta expressão igual a um $(b(x)/a_0(x))$, como na Equação 154.

$$c'_1(x)\phi'_1(x) + c'_2(x)\phi'_2(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)} \quad \text{equação 154}$$

Em suma, determinámos $c_1(x)$ e $c_2(x)$ de tal modo que Equação 155 se cumpra, num intervalo I .

$$\begin{cases} c'_1(x)\phi_1(x) + c'_2(x)\phi_2(x) = 0 \\ c'_1(x)\phi'_1(x) + c'_2(x)\phi'_2(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases} \quad \text{equação 155}$$

Mas como é que podemos saber que com Equação 155 temos solução? Tendo como incógnitas $c'_1(x)$ e $c'_2(x)$, a matriz do sistema é a de Equação 156, cujo determinante é correspondente ao Wronskiano.

Como vimos na disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica (als1), quando um determinante é diferente de zero, significa que o sistema tem uma e uma só solução, isto é, é um sistema possível e determinado - neste caso o $\det(W) \neq 0$ em I .

$$\begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi'_1(x) & \phi'_2(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

equação 156

Sendo assim, experimentemos então resolver $y'' + y = \csc(x)$, sabendo de antemão a solução geral da equação homogênea associada $y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$. Sabendo a solução da equação homogênea já podemos concluir que o nosso sistema fundamental é $\{\cos(x), \sin(x)\}$. Pelo método da variação das constantes calculamos então $c_n(x)$, com $n = \{1, 2\}$. Resolvendo a aplicação do sistema da Equação 155, agora em Equação 157, temos que:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} c'_1(x)\cos(x) + c'_2(x)\sin(x) = 0 \\ -c'_1(x)\sin(x) + c'_2(x)\cos(x) = \frac{\csc x}{1} = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} c'_2(x) = -\frac{c'_1(x)\cos(x)}{\sin(x)} \\ -c'_1(x)\sin(x) - \frac{c'_1(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} - \\ -c'_1(x)\sin^2(x) - c'_1(x)\cos^2(x) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} - \\ -c'_1(x)(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} c'_2 = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x) \\ -c'_1(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = \ln|\sin(x)| \\ c_1(x) = -x \end{cases} \end{aligned}$$

equação 157

Sendo assim, a nossa solução geral é $y = -x \cos(x) + \ln|\sin(x)| \sin(x) + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, em intervalos onde $\sin(x) \neq 0$. ■

Para equações de ordem $n \in \mathbb{N}$ completas com a forma de Equação 109, com $a_0(x) \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b : I \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in I$, obtém-se uma solução particular da forma de Equação 158, onde $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial ordinária homogênea associada, determinando $c_1(x), \dots, c_n(x)$ tais que o sistema de Equação 159 se verifique.

$$y_p = c_1(x)\phi_1(x) + \dots + c_n(x)\phi_n(x)$$

equação 158

equação 159

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_1(x)\phi_1(x) + \dots + c'_n(x)\phi_n(x) = 0 \\ c'_1(x)\phi'_1(x) + \dots + c'_n(x)\phi'_n(x) = 0 \\ \vdots \\ c'_1(x)\phi^{(n-2)}_1(x) + \dots + c'_n(x)\phi^{(n-2)}_n(x) = 0 \\ c'_1(x)\phi^{(n-1)}_1(x) + \dots + c'_n(x)\phi^{(n-1)}_n(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{array} \right.$$

Sejam $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b : I \rightarrow \mathbb{R}$, sendo I um intervalo aberto, contínuos e $a_0(x) \neq 0, \forall x \in I$, então, o problema dos valores iniciais de Equação 160, onde x_0 está fixo em I e $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ são constantes dadas, tem uma e uma só solução em I .

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

equação 160

Por exemplo, se considerarmos o seguinte problema de Cauchy (Equação 161), será que podemos afirmar que ele tem uma única solução em $\mathbb{R}$?

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + 4y' + 4y = \cos(2x) \\ y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 1 \end{array} \right.$$

equação 161

Se verificarmos a expressão da equação linear de ordem 2, podemos ver que esta coincide com a forma de Equação 160 e há continuidade. Tendo $x_0 = \pi$ temos que, para ordem dois ($n = 2$), $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$, pelo que é verdade que existe apenas uma solução, através do teorema explícito em Equação 160.

Trajetórias ortogonais

Imaginemos que temos um conjunto de uma infinidade de curvas e que pretendemos traçar outras curvas, a si, perpendiculares - por curva perpendicular entende-se que no ponto de interseção as retas tangentes de ambas as curvas fazem um ângulo de 90° entre si. Este cenário encontra-se retratado na Figura 21.

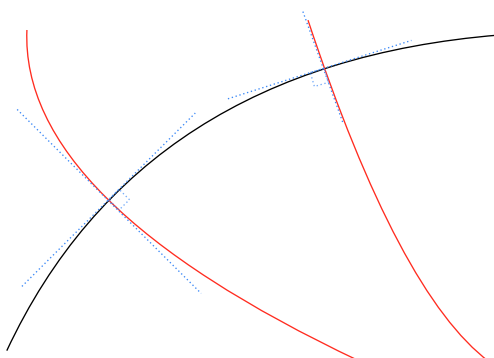


figura 21

trajetórias ortogonais

De modo analítico como é que podemos processar este tipo de problema? Consideremos o conjunto de curvas iniciais (representada pela curva a negro, na Figura 21) como um integral geral $f(x, y) = y'$, sendo y' a tangente à família de curvas. A reta perpendicular a esta reta tangente, tendo a original declive m , a sua transformada terá declive $-1/m$, pelo que sabendo que a família original de curvas segue a equação diferencial $y' = f(x, y)$, então a família transformada seguirá a equação diferencial $y' = -1/f(x, y)$. Por exemplo, se a nossa família de curvas for o conjunto das retas que passam pela origem, como demonstrado na Figura 22, a equação a que estas se regem é $y = mx + b$.

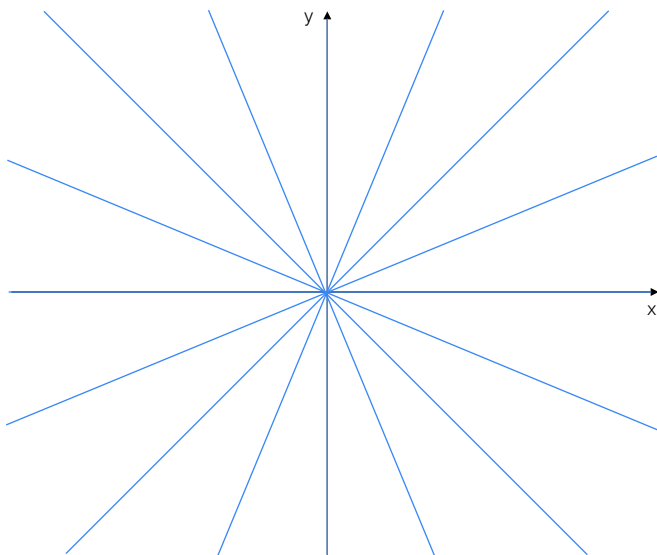


figura 22
retas na origem

Mas $y = mx + b$ não é uma equação diferencial, e como tal, derivando temos que $y' = m$ e processando ambas as equações temos que $y' = y'x$, a qual já é equação diferencial.

A família de curvas ortogonais (aqui o termo ortogonal coincide com a designação de perpendicular) terá de ser o simétrico do inverso da equação diferencial da família de curvas original, pelo que $y' = -x/y$. Sendo esta equação diferencial de variáveis separáveis, temos a Equação 162.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y \frac{dy}{dx} = -x \\ &\Leftrightarrow \int y dy = -\int x dx \\ &\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2c \end{aligned}$$

equação 162

O integral geral da forma de $x^2 + y^2 = 2c$, com c real positivo ou zero tem a forma da equação geral de uma circunferência, tal como podemos ver pela Figura 23.

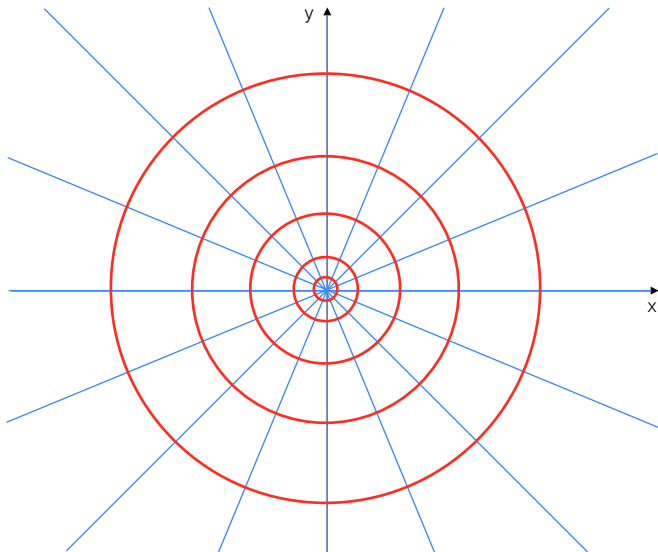


figura 23
trajetórias ortogonais

3. Séries Numéricas

Em Cálculo I (a1s1) vimos como é que podíamos transformar expressões como exponencial ou logaritmo. Agora, vamos estudar métodos para a análise do comportamento de polinómios, numa soma infinita. Primeiro, antes de chegar aos polinómios, vejamos **séries numéricas**

séries numéricas

Conceitos básicos

Consideremos o trajeto descrito na Figura 24.

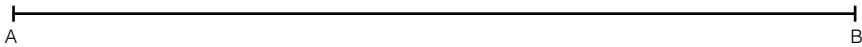


figura 24
trajeto

Se percorrermos o trajeto do ponto A para o ponto B, após caminhar *d* metros, consumindo *t* segundos, até B vou percorrendo *d*/2, *d*/4, *d*/8, ..., consumindo, no final, 2*t* segundos. Representado na Figura 25, em termos matemáticos, considerando *S* como o tempo resultante, temos a Equação 163.



figura 25
trajeto

equação 163

$$\begin{aligned} S_1 &= t \\ S_2 &= t + \frac{t}{2} \\ S_3 &= t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} \\ S_4 &= t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} \\ &\dots \\ S_n &= t + \frac{t}{2} + \dots + \frac{t}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

De forma mais representativa, S_n é a soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica (cada termo relaciona-se com o seguinte pela multiplicação de uma razão constante) com razão $1/2$, cujo primeiro termo é t .

Em geral, uma **progressão geométrica** tem a expressão da Equação 164, onde t_1 é o primeiro termo da série, r é a razão e n é o número de termos.

$$S_n = t_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right), \quad r \neq 1$$

equação 164

Aplicando ao nosso exemplo, a Equação 164 fica com o aspeto da Equação 165.

$$S_n = t \left(\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} \right) = 2t \left(1-(1/2)^n \right)$$

equação 165

Avaliando o limite para um n a aproximar-se do infinito temos a Equação 166.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2t \left(1-(1/2)^n \right) = 2t$$

equação 166

Em termos gerais e matematicamente mais corretos, uma **série numérica** é assim uma expressão da forma da Equação 167, em que a_n é **termo geral**.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

equação 167

nota!! na Equação 167 o símbolo Σ é a letra maiúscula sigma, do alfabeto grego, que pretende representar o conceito de somatório.

À expressão de $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ dá-se o nome de **soma parcial**, também representável por $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Uma série da forma da Equação 167 diz-se também **convergente** se e só se a sua soma parcial $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for convergente, ou **divergente** se a sua soma parcial $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for divergente. A estas duas características damos o nome de **natureza da série**. No caso de uma série ter natureza convergente, ao limite da Equação 168 chamamos de **soma da série**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

equação 168

Séries geométricas

Uma **série geométrica** é uma série da forma de Equação 169 que segue os padrões de uma progressão geométrica, supondo que $a \neq 0$ e $r \in \mathbb{R}$.

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

equação 169

Avaliando o comportamento da série geométrica, através da Equação 164, temos que podemos escrever a Equação 170.

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1$$

equação 170

Verificando a soma da série podemos avaliar, genericamente, a natureza entre vários casos de r :

- para $r = 1$: $S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \begin{cases} \infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases} \therefore \text{é divergente;}$
- para $r \neq 1$: $S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-r} (1-r^n) = \frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1 \therefore \text{é convergente;}$
- para $r = -1$: $S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{2} (1 - (-1)^n) = \text{indefinido}^5$;
- para $|r| > 1$: a série diverge $\pm\infty$.

Em suma, a série geométrica converge se e só se $|r| < 1$, pelo que, no caso de convergência, a soma é de $(a/(1-r))$.

Como podemos então determinar a natureza da série da Equação 171, determinando a sua soma, caso convirja?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

equação 171

Se calcularmos, logo à partida, o primeiro termo da série, temos que este é $1/3$. Assim, sabendo que a série é geométrica, e tendo o primeiro termo, podemos escrevê-la na forma da Equação 164, ficando a Equação 172.

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - (2/3)^n}{1 - (2/3)} \right)$$

equação 172

Analisando o seu limite, temos que (Equação 173):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (2/3)^n = 1 \therefore \text{é convergente } (2/3 < 1)$$

equação 173

Dada a sua natureza ter sido avaliada como convergente, a sua soma é calculada na Equação 174.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1/3}{1 - (2/3)} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

equação 174

Séries redutíveis, de Mengoli ou telescópicas

Analisemos agora séries numéricas com a forma da Equação 175.

⁵ Esta sucessão é formada por duas sub-sucessões (com n par e n ímpar) com limites diferentes, pelo que a sucessão não tem limite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

equação 175

Uma expressão da forma da Equação 175 pode ser reescrita de forma a que possamos somar duas frações, recompondo o corpo do somatório, como podemos ver na Equação 176.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

equação 176

Se verificarmos as somas parciais podemos verificar que em todos os passos a soma final é igual ao primeiro valor, menos o último (Equação 177):

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\ S_2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} \\ S_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ S_n &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

equação 177

Verificando também a sua natureza, podemos ver também que a série converge e tem como soma 1 (pois $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$). Este primeiro exemplo serve assim de motivação para o estudo de um tipo novo de séries. Definimos então que uma série do tipo da Equação 178 é uma **série redutível** (telescópica ou de Mengoli) se e só se se verificar que $\exists p \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_n - u_{n+p})$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_{n+p} - u_n)$.

série redutível
 © Pietro Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

equação 178

No exemplo anterior, em que verificamos a Equação 175, o a_n deverá ser igual a $(1/n) - (1/(n+1))$, onde $u_n = (1/n)$ e $u_{n+1} = (1/(n+1))$ e $p = 1$.

Mas como é que fica uma expressão em que verificamos Equação 178, com a respetiva condição, para um $p = 3$? Vejamos a Equação 179.

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 - u_4 \\ S_2 &= u_1 - u_4 + u_2 - u_5 \\ S_3 &= u_1 - u_4 + u_2 - u_5 + u_3 - u_6 \\ S_4 &= u_1 - u_4 + u_2 - u_5 + u_3 - u_6 + u_4 - u_7 \\ S_5 &= u_1 - u_4 + u_2 - u_5 + u_3 - u_6 + u_4 - u_7 + u_5 - u_8 \end{aligned}$$

equação 179

Experimentando calcular a aproximação para um $n \in \mathbb{N}$, temos que, com base no processo anterior (Equação 180):

$$S_n = (u_1 + u_2 + u_3) - u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3}$$

equação 180

Dado isto, a sua soma será (Equação 181):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_1 + u_2 + u_3 - \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3})$$

equação 181

Para um caso geral, com $p \in \mathbb{N}$, tendo $a_n = u_n - u_{n+p}$, como verificado pela Equação 178 (e respetiva condição) temos Equação 182.

$$S_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_p) - u_{n+1} - u_{n+2} - \dots - u_{n+p}$$

equação 182

Assim, a soma geral será também a representada na Equação 183:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_p - \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_{n+2} - \dots - u_{n+p})$$

equação 183

Do décimo segundo ano de escolaridade já devemos saber que se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \mathbb{R}$ então Equação 184 (a) é válida, o que por conseguinte Equação 184 (b) também o é.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+p} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (a)$$

equação 184

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_p - p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (b)$$

nota! o limite de u_n quando n tende para ∞ oscila, pelo que é pouco provável que Equação 184 (a) se verifique, sendo que, caso não se verifique, Equação 184 (b) deixa de ser válido.

nota

Determinemos assim a natureza da série da Equação 185, e caso haja convergência, calculemos a soma da mesma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)}$$

equação 185

Para começar, como já vimos logo no primeiro exemplo, devemos tentar reescrever a Equação 185 como um somatório de uma soma, de forma a que possamos ter algo com a forma $a_n = u_n - u_{n+p}$. Sendo assim, temos (Equação 186):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}$$

equação 186

Através da Equação 182 podemos afirmar que (Equação 187):

$$S_n = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3} - u_{n+4}$$

equação 187

Calculando o limite de u_n temos que este é 0, pelo que é real, logo é válido tanto a Equação 184 (a) como a Equação 184 (b), por conseguinte, a natureza da série é convergente. Agora só precisamos de calcular a soma (Equação 188):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 4 \times 0 = \frac{25}{12}$$

equação 188

Determinemos agora, da mesma forma, a natureza da série da Equação 189. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

equação 189

Mais uma vez, para iniciarmos um problema deste tipo, devemos sempre tentar bipartir a nossa série, como podemos ver pela Equação 190.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) - \ln(n+1)$$

equação 190

Aqui, $S_n = u_1 - u_{n+1}$, sendo que o limite para ∞ de $\ln(n)$ é ∞ (infinito), o que não é real, o que permite que concluamos que a natureza seja divergente. ■

Sabendo assim trabalhar com séries geométricas e de Mengoli, numa composição, dado o aumento do grau de complexidade dos problemas, podemos-nos suportar da seguinte **proposição**, a qual constata as seguintes afirmações:

proposição

- (i) - se $\lambda \in \mathbb{R}$ e se Equação 178 for convergente, então a soma da própria série de $\sum \lambda a_n$, representada por $\sum \lambda a_n$ também é convergente e verifica-se a Equação 191.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

equação 191

Considerando válido que $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, aplicando a análise tendencial para $n \rightarrow \infty$ em ambos os membros, temos que se prova a Equação 191.

- (ii) - se $\lambda \neq 0$ e se Equação 178 for divergente, então a soma da própria série de $\sum \lambda a_n$, representada por $\sum \lambda a_n$ também é divergente.

Será que com $\lambda=0$, Equação 178 divergente, $\sum \lambda a_n$ é convergente? $\sum \lambda a_n$ é convergente, porque $\lambda=0$, logo $\sum(0.a_n) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$. Assim, se conseguirmos provar que $\sum \lambda a_n$ é convergente e $\lambda \neq 0$, conseguimos verificar se Equação 178 é convergente. Por (i) temos a Equação 192.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1}(\lambda a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (convergente)}$$

equação 192

- (iii) - se tivermos duas séries do tipo de Equação 178 e ambas forem convergentes, a série formada pela soma de termos de mesmo índice também é convergente e a Equação 193 verifica-se.

equação 193

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

Temos que $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, em limite com $n \rightarrow \infty$ temos que (Equação 194):

equação 194

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \dots$$

Em relação ao segundo membro temos o limite para $n \rightarrow \infty$ de $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n$, o que perfaz a Equação 193.

- (iv) - se uma série do tipo de Equação 178 for convergente e outra do mesmo tipo for divergente, então a série da soma, termo-a-termo, vai ser divergente.

Consideremos uma série do tipo de Equação 178 convergente e $\sum (a_n + b_n)$ convergente. Por (iii) e por (i) será que podemos afirmar que $\sum ((a_n + b_n) - a_n)$ é convergente? (note-se que $\sum ((a_n + b_n) - a_n) = \sum (b_n)$)

Note-se que se forem ambas as séries divergentes, o resultado não terá de ser divergente. Numa dada soma $a_1 + a_2 + \dots + a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots$, com $p \in \mathbb{N}$, consideramos $a_1 + a_2 + \dots + a_p$ como uma **soma parcial de ordem p** (S_p) e $a_{p+1} + a_{p+2} + \dots$ como **resto de ordem p** (R_p). Como **teorema**, se $\sum_{n=p+1}^{\infty} (a_n)$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ converge e Equação 195 é válida.

soma parcial de ordem p
resto de ordem p , teorema

equação 195

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$$

Vice-versa, também se valida Equação 195, na forma de Equação 196, sendo que se $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ converge, então $\sum_{n=p+1}^{\infty} (a_n)$ converge:

equação 196

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_p$$

Considerando $\sum_{n=p+1}^{\infty} (a_n)$ como R_p e $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ como S (sendo soma total), por teorema, temos que se S converge, então $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$.

Na prática não é tanto este o teorema com que trabalhamos, mas antes o seguinte, onde se S converge, então acontece Equação 197.

equação 197

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Demonstrando este último resultado temos que $S_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $S_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, o que nos dá o resultado que $a_n = S_n - S_{n-1}$. Como para $n \rightarrow \infty$ S_n converge para S e S_{n-1} converge para S , $a_n = S - S$ converge para 0.

nota! o recíproco deste último teorema é falso!

nota

Vejamos um exemplo onde experimentamos aplicar este novo conhecimento. Consideremos assim a seguinte soma (Equação 198) e tentemos averiguar qual é o limite para o infinito de a_n .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$$

equação 198

O limite é $1/5$, o que por si é diferente de zero. Dado este resultado, podemos ter a certeza absoluta que a série é divergente.

Será que agora conseguimos arranjar uma série divergente e que se aproxime lentamente de zero? Consideremos a série da Equação 199.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$$

equação 199

Neste exemplo temos que o limite quando $n \rightarrow \infty$ é 0, mas a série é claramente divergente (para ∞) - **série harmónica** de $(1/n)$.

série harmónica

Séries de termos não negativos

No início desta unidade estudámos dois tipos de séries. Até agora, sabemos que se uma série tiver natureza divergente não vale a pena obter o seu valor de soma, mas no casos de séries convergentes é importante saber encontrar o seu valor, qualquer que seja a complexidade do problema. Agora vamos estudar séries de termos não negativos, com teoremas que podem ser aplicados a séries de termos não positivos (se estes forem multiplicados por -1).

Um **teorema** diz-nos que seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n \geq 0$, qualquer que seja o n natural, esta série converge se e só se $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for limitada superiormente. Provando, uma soma $S_n = a_1 + \dots + a_n$, ao adicionar mais um termo, a sua soma aumentará ou manter-se-á igual. Assim, como $a_n \geq 0$, então $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente. Por um resultado de sucessões, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge se e só se for limitada superiormente.

teorema

Consideremos a expressão da série da Equação 200.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

equação 200

A série em Equação 200 não é nem geométrica, nem de Engoli, mas sabendo que $n! \geq 2^{n-1}$, qualquer que seja n natural, por inversão temos que $1/n! \leq 1/2^{n-1}$. Para a série do segundo membro da inequação ($\sum 1/2^{n-1}$) nós sabemos as suas características, sendo uma série geométrica de razão $1/2$. Para uma série geométrica, como já vimos, se a razão é $1/2$, então há convergência. Para este caso o teorema dado é válido. Usando a comparação $1/n! \leq 1/2^{n-1}$, se $\sum 1/2^{n-1}$ é limitado superiormente, então $1/n!$ também é limitado superiormente, pelo que, automaticamente, pelo teorema, é convergente. Embora numa primeira fase pareça um bocado caído do céu, a comparação com $1/2^{n-1}$, mais à frente iremos abordar métodos para chegar a boas comparações.

O critério seguinte relaciona a natureza das séries (de termos não negativos) com a natureza de integrais impróprios. Assim, sejam $a_n \geq 0$ e $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função decrescente tal que $f(x) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e o integral

impróprio $\int_1^\infty f(x)dx$ têm a mesma natureza. A este critério damos o nome de **critério do integral**.

Uma aplicação deste último conceito abordado é o estudo das chamadas **séries de Dirichlet** (também denominadas de séries harmônicas de ordem α). Uma série de Dirichlet tem a forma da Equação 201.

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Aferindo o integral $\int_1^\infty (1/n^\alpha)dx$ temos que este converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$, pelo que, pelo critério do integral podemos afirmar o que consta da Equação 202.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ é } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

nota!! à série $\sum_{n=1} (1/n)$ também podemos dar o nome de **série harmónica** (de ordem 1).

Agora já podemos voltar atrás e perceber que para a resolução de $\sum_{n=1} (1/n!)$ usou-se um argumento que passou, de certo modo, por comparar as somas parciais da série a analisar com as somas parciais da série geométrica de razão $1/2$. O critério que vamos agora analisar, denominado de **critério de comparação**, permite esclarecer em que condições é que podemos usar estas técnicas de comparação para estudar a natureza de uma série. Para tal, suponha-se que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$. Então, uma das duas situações da Equação 203 pode acontecer. Considerando Σ como $\Sigma_{n=1}$ (até infinito), temos a Equação 203.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ \text{(b)} \quad & \sum a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum b_n \text{ diverge} \end{aligned}$$

Por exemplo, a série seguinte é convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$$

Analisando a série pelo critério de comparação podemos obter a seguinte desigualdade (Equação 204), a qual levar-nos-á à utilização da convergência da série de Dirichlet com $\alpha=3/2$.

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O critério de comparação não nos diz nada acerca da natureza da série em situações em que a série de termo geral mais pequeno é convergente ou quando a série de termo geral maior é divergente. A comparação dos termos gerais de duas séries

critério do integral

séries de Dirichlet

© Peter Gustav Dirichlet

equação 201

equação 202

nota, série harmónica

critério de comparação

equação 203

equação 204

pode também ser feita na forma de limite, usando uma consequência do critério anterior, definido como corolário do critério de comparação (avaliando uma comparação por passagem ao limite). Assim, sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tais que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$. Para tal, suponha-se que o limite de Equação 205 existe.

$$l := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{equação 205}$$

Para o limite de Equação 205, se existir, então uma das três situações de Equação 206 é válida.

- (a) se $l \in]0, \infty[$, as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são da mesma natureza; equação 206
- (b) se $l = 0$, $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge ;
- (c) se $l \neq 0$, $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

Por exemplo, a série da Equação 207 é convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{1+n^4} \quad \text{equação 207}$$

Pela comparação por passagem ao limite com a série de Dirichlet com $\alpha=3$ e como o corpo da série é maior ou igual a 0, pelo que $(1/n^3) > 0$, então verifica-se a Equação 208.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+5}{1+n^4}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4+5n^3}{1+n^4} = 2 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{equação 208}$$

Sendo assim, a série dada tem a mesma natureza da série $\sum (1/n^3)$ (que é convergente). ■

Num teorema novo, é dito que sendo $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então se $\sum |a_n|$ converge, então $\sum a_n$ também converge. No caso de convergência é válida a Equação 209.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{equação 209}$$

Chegamos assim a uma nova definição, a qual seja $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\sum |a_n|$ for convergente, diz-se que $\sum a_n$ é **absolutamente convergente**. Assim, o teorema anterior diz-nos que toda a série absolutamente convergente, é convergente.

absolutamente convergente

Por outro lado, seja $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\sum a_n$ for convergente, mas $\sum |a_n|$ for divergente, então diz-se que $\sum a_n$ é **simplesmente convergente**.

simplesmente convergente

Estas definições são importantes porque para somas infinitas há operações que não funcionam, em comparação com somas finitas, como iremos verificar mais à frente.

Através de séries geométricas também podemos efetuar comparações, pelo que se $0 \leq |a_n| \leq r^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists r \in]0,1[$, então, como $\sum r^n$ é série geométrica convergente, pelo critério de comparação, $\sum |a_n|$ também converge (tal como $\sum a_n$). Por outro lado, se $|a_n| \geq 1$, então o $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ ou não existe, ou existe e é diferente de zero, logo $\sum a_n$ e $\sum |a_n|$ divergem.

Critério de Cauchy

Um modo de simplificar o tratamento de comparações com progressões geométricas é utilizando um novo critério, este como nome de **critério de Cauchy** (por vezes também referido de **critério das raízes**). Assim, seja $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para tal, suponhamos que existe a Equação 210.

critério de Cauchy
critério das raízes

$$l := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

equação 210

Dado isto, uma de duas alternativas seguintes pode ocorrer:

- (a) se $l < 1$, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente;
- (b) se $l > 1$, as séries $\sum a_n$ e $\sum |a_n|$ divergem.

nota!! para um $l = 1$, o critério é inconclusivo.

nota

Por exemplo, vejamos a seguinte série e tentemos aplicar o critério de Cauchy (Equação 211).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3} \right)^{2n}$$

equação 211

Primeiro, enquadrando o nosso critério, temos que $(n^2 + 1 / 2n^2 + 3)^{2n} = a_n = |a_n|$. Aplicando o critério de Cauchy temos a Equação 212.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3} \right)^{2n}} = \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3} \right)^{2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} < 1$$

equação 212

Sendo $l = (1/4)$, verificando as alternativas do critério de Cauchy, temos que a série é absolutamente convergente. ■

Num segundo exemplo temos a série da Equação 213.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}$$

equação 213

Mais uma vez temos uma estrutura de um corpo de série elevado a n . Sendo o mesmo corpo igual a a_n temos a Equação 214.

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{e} > 1$$

equação 214

Sendo $l = 3e^{-1}$ e sendo este $l > 1$, temos que a série diverge.

Crítério de d'Alembert

Consideremos duas situações: se $0 < |a_{n+1}| \leq r|a_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists r \in]0,1[$; se $|a_{n+1}| \geq |a_n| > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para a primeira situação temos que, em casos particulares, inicialmente temos que $|a_2| \leq r|a_1|$, depois $|a_3| \leq r|a_2| \leq r^2|a_1|$, e ainda depois continuamos com $|a_4| \leq r|a_3| \leq r^2|a_2| \leq r^3|a_1|$, o que, prosseguindo, nos faz obter $0 \leq |a_n| \leq r|a_{n-1}| \leq \dots \leq r^{n-1}|a_1|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tomando apenas $|a_n|$ e $r^2|a_1|$ temos que $\sum a_n \leq \sum r^{n-1}|a_1|$, onde $\sum r^{n-1}|a_1|$ é uma série geométrica convergente, pelo que $\sum |a_n|$ é convergente (e $\sum a_n$ também).

Já no segundo caso temos que $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_1| > 0$, pelo que $\lim a_n$ ou não existe ou é diferente de zero, se existir. Em qualquer dos casos $\sum |a_n|$ e $\sum a_n$ divergem.

Uma forma de simplificar estes resultados é através da aplicação de um novo critério - o **critério de d'Alembert**. Assim, seja $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para tal suponhamos que existe o limite da Equação 215.

critério de d'Alembert

© Jean-Baptiste d'Alembert

$$l := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

equação 215

Dado isto, uma de duas alternativas seguintes pode ocorrer:

- (a) se $l < 1$, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente;
- (b) se $l > 1$, as séries $\sum a_n$ e $\sum |a_n|$ divergem.

nota!! para um $l = 1$, o critério é inconclusivo.

nota

Por exemplo, vejamos o seguinte exemplo de série da Equação 216 e tentemos aplicar o critério de d'Alembert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

equação 216

Primeiro, na tentativa de enquadrar o nosso novo critério, temos que igualar a expressão $(n! / n^n) = a_n = |a_n| > 0$. Aplicando o critério temos a Equação 217.

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{n^n (n+1)n!}{(n+1)^n (n+1)n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1$$

equação 217

Como $l = e^{-1}$, temos que a série é absolutamente convergente. ■

Num segundo exemplo temos a série da Equação 218.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

equação 218

Sendo que $a_n = |a_n| = (n! / 2^n)$, temos a Equação 219.

$$\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \frac{2^n (n+1)n!}{2^{n+1} n!} = \frac{2^n (n+1)}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty > 1$$

equação 219

Como $l = \infty$, e por si, $l > 1$, a série diverge. ■

Através do critério de d'Alembert também podemos verificar as séries de Dirichlet, como podemos ver na Equação 220.

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = l$$

equação 220

Com $l = 1$, o critério de d'Alembert é inconclusivo, tal como já tínhamos previsto anteriormente. ■

Séries alternadas e critério de Leibniz

Uma série harmónica $\Sigma(1/n)$ é divergente, isto é, a sua soma é ∞ . Mas como é que se comportará a série da Equação 221?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

equação 221

Se desenvolvermos o somatório da Equação 221 podemos reparar que este alterna o sinal ao longo de toda a soma, como podemos ver na Equação 222.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

equação 222

Sem demonstrar o porquê, a soma dá $\ln 2$, embora praticamente se possa visualizar a partir da Figura 26.

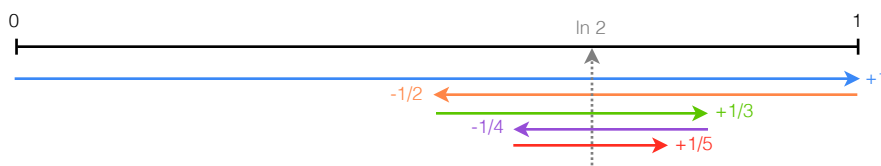


figura 26
soma da Equação 222

Define-se assim o conceito de **série alternada**, da forma da Equação 223, com **série alternada**
 $u_n \geq 0, \forall u \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \quad \text{equação 223}$$

Uma forma simples e prática de verificar a natureza das séries alternadas é aplicando um novo critério - o **critério de Leibniz**. Em conceito, se $u_n > 0, \forall u \in \mathbb{N}$, com **critério de Leibniz**
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decrescente e $\lim_{u \rightarrow \infty} u_n = 0$, então as séries da Equação 223 são convergentes. **© Gottfried von Leibniz**

Se considerarmos uma expressão geométrica de S para a soma da série, temos que pelo critério de Leibniz, verifica-se a Equação 224, com $\sum (-1)^{n+1} u_n = S$.

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 > S \\ S_2 &= u_1 - u_2 > S \\ S_3 &= u_1 - u_2 + u_3 > S \\ S_4 &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 > S \\ &\vdots \\ |S_n - S| &\leq u_{n+1} \end{aligned} \quad \text{equação 224}$$

nota!! o erro $|S_n - S|$ torna u_{n+1} majorante da série.

nota

Fator comutatividade e associatividade em séries por natureza

Na operação de adição finita existem duas propriedades muito importantes: **comutatividade** e **associatividade**. Em termos de séries infinitas, essas propriedades não são tão lineares. Vejamos assim a seguinte série divergente da Equação 225:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad \text{equação 225}$$

Se associarmos ou trocarmos as parcelas de formas diferentes podemos obter diferentes valores, como podemos ver na Equação 226.

$$\begin{aligned} (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots &= 0 \\ 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots &= 1 \\ 1 + 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots &= 2 \end{aligned} \quad \text{equação 226}$$

Em suma, eis uma tabela, na Figura 27, que mostra a possibilidade de aplicação de ambas as regras, por natureza de séries:

série	associatividade	comutatividade
divergentes	não definido	não definido
de termos não negativos	é válido	é válido
simplesmente convergentes	é válido	não definido
absolutamente convergentes	é válido	é válido

figura 27
tabela de comutatividade e associatividade por série

No caso de séries de termos não negativos, se a série é obtida por uma certa associação dos seus termos de uma determinada soma, então a série original converge para a mesma soma.

Já todos conhecemos a quantidade π , mas porque é que esta é igual a 3.14159... ? Em termos gráficos, vejamos a Figura 28.

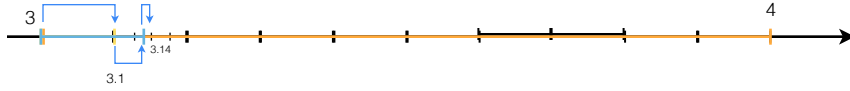


figura 28
a quantidade π (pi)

Partindo do primeiro dígito, temos $\pi = 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + \dots$. Através de uma série geométrica podemos representar a Equação 227.

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

equação 227

Vejamos um segundo exemplo, no qual analisamos a quantidade 0.77777... . Em termos de série, podemos escrever esta quantidade como uma série geométrica de $(7/10) + (7/10^2) + (7/10^3) + \dots + (7/10^n)$. Através dos conceitos já abordados, de séries geométricas, temos a Equação 228.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}, \text{ pois a razão geométrica é } \frac{1}{10}$$

equação 228

Num terceiro exemplo temos que $a = 1, (24)^{(6)}$. Neste caso, temos que a é igual a escrever $1 + (2/10) + (4/10^2) + (2/10^3) + (4/10^4) + \dots = 1 + (24/10^2) + (24/10^4) + (24/10^6) + \dots = \Sigma(24/10^{2n})$. Analisando temos a Equação 229.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{10^{2n}} = 1 + \frac{24}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{\frac{24}{100}}{\frac{99}{100}} = 1 + \frac{24}{99} = \frac{41}{39}$$

equação 229

4. Séries de Potências e Fórmula de Taylor

Tendo o conhecimento do comportamento e análise de séries numéricas, podemos iniciar o estudo da temática de **séries de potências**. Assim, uma série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$ é um expressão da forma da Equação 230, onde $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e se é uma variável real.

séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \dots$$

equação 230

⁶ 1,(24) significa que esta quantidade é uma dízima infinita periódica representável por 1,24242424242424...

Em Equação 230, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são denominados de **coeficientes da série**. O primeiro coeficiente, a_0 , é obtido pelo expoente n , quando este é $n = 0$. Acontece que como $x - c = 0$, temos uma indeterminação 0^0 . Esta situação é esclarecida pela formação de uma convenção, a qual, *per si*, define o primeiro termo da série.

Um exemplo de série de potências é a seguinte série centrada em $c = 0$, em coeficientes $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, como podemos ver na Equação 231.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

equação 231

A série acima define que, pelos resultados já conhecidos da unidade anterior, para cada $x \in \mathbb{R}$, trata-se de uma série geométrica de razão x . Por conseguinte, a série acima converge se e só se $|x| < 1$. Caso $|x| < 1$, a sua soma é exprimida pela Equação 232.

$$\frac{1}{1-x}$$

equação 232

Por conseguinte, temos que a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é obtida, por Equação 232, da forma que se pode verificar em Equação 233.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

equação 233

Nesta série define-se um **domínio de convergência** - conjunto de pontos para o qual se garante convergência - como $] -1, 1[$.

domínio de convergência

Um segundo exemplo é dado pela seguinte série (Equação 234):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

equação 234

Uma forma de resolver a série acima, tal como abordado na unidade anterior, é aplicando o critério de d'Alembert. Assim, temos que fazer como na Equação 235.

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|^n |x| n!}{|x|^n (n+1) n!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

equação 235

Como podemos verificar acima na Equação 235, pelo critério de d'Alembert, o domínio de convergência desta série de potências é $\mathbb{R}$ (onde a convergência até é absoluta).

Um terceiro exemplo pode ser a resolução da série da Equação 236.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x+1)^n = (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^3 + \dots$$

equação 236

Passando à resolução, aplicando novamente o critério de d'Alembert, temos a Equação 237:

$$\frac{\left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} (x+1)^{n+1} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x+1)^n \right|} = \frac{|x+1|^{n+1} n}{|x+1|^n (n+1)} = |x+1| \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x+1|$$

equação 237

Pelo critério de d'Alembert, se $|x+1| < 1$, a série converge absolutamente; se $|x+1| > 1$, a série diverge; se $|x+1| = 0$, o critério não traduz qualquer resultado. Resolvendo a inequação $|x+1| < 1$ temos que $|x+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+1 < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 0$. Sabendo que $-2 < x < 0$, temos que se $x \in]-2, 0[$, a série converge absolutamente; se, por outro lado, $x \in]-\infty, -2] \cup]0, \infty[$, a série diverge; se $x = -2$, a série diverge; se $x = 0$, a série converge (pelo critério de Leibniz, por ser uma série alternada). Assim, o domínio de convergência da série acima é $]-2, 0]$. ■

Um último exemplo de aplicação é o ilustrado a partir da série da Equação 238.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$$

equação 238

Mais uma vez, pelo critério de d'Alembert, temos a Equação 239.

$$\frac{(n+1)!|x-2|^{n+1}}{n!|x-2|^n} = (n+1)|x-2| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \text{ exceto } x=2 \rightarrow 0$$

equação 239

Pelo critério de d'Alembert, o domínio de convergência é apenas $\{2\}$, pelo que é o único valor para o qual o limite é menor que 1. ■

Por vias de um **teorema**, temos que dada uma série de potências da forma de Equação 230, verifica-se uma e uma só das seguintes afirmações:

teorema

- ▶ a série converge (absolutamente) em $x = c$, e diverge quando $x \neq c$;
- ▶ a série converge absolutamente em $\mathbb{R}$;
- ▶ existe um único $R > 0$ tal que a série converge absolutamente se $|x-c| < R$ e diverge se $|x-c| > R$.

Através do terceiro ponto anterior, temos que $x \in]c-R, c+R[$. Já no primeiro ponto o domínio de convergência é apenas $\{c\}$, pelo que se convencionou que R (denominado de **raio de convergência**) é igual a $R = 0$. Por fim, no segundo ponto convencionou-se que $R = \infty$. Sempre que $R \neq 0$, a $]c-R, c+R[$ damos o nome de **intervalo (aberto) de convergência**.

raio de convergência

intervalo de convergência

Consideremos uma série de potências da forma de Equação 230, com $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $x = c$, já sabemos que converge, dado que uma série de potências converge sempre no seu centro. Então, mas como é que podemos avaliar a natureza quando $x \neq c$? Aplicando o critério de d'Alembert, tal como já temos realizado, temos a Equação 240.

nota!! na Equação 240 considera-se que existe limite de $(|a_{n+1}|/|a_n|) \rightarrow l$.

nota

$$\frac{|a_{n+1}||x-c|^{n+1}}{|a_n||x-c|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-c| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l|x-c|$$
equação 240

Se prosseguirmos, agora temos de ser capazes de saber distinguir quando é que $l|x-c|$ é menor que 1 e quando é que é maior que 1. Assim sendo, eis Equação 241.

$$\left. \begin{aligned} l|x-c| < 1 &\Leftrightarrow |x-c| < \frac{1}{l} \\ l|x-c| > 1 &\Leftrightarrow |x-c| > \frac{1}{l} \end{aligned} \right\} R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$
equação 241

nota!! atenção que embora haja semelhança entre a Equação 241 com o limite suposto no critério de d'Alembert, os limites não são iguais!

Até à Equação 241 provámos a seguinte **proposição**: seja Equação 230, com $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, se existir o limite de Equação 215, então Equação 242 é válida.

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$
equação 242

Analogamente, temos uma aplicação com o critério de Cauchy. Assim, seja Equação 230, com $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, se existir o limite de Equação 210, então Equação 243 é válida.

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$
equação 243

Note-se que caso não existam os limites de Equação 210 ou Equação 215, tal como nos próprios critérios de Cauchy e de d'Alembert, respetivamente, não é possível aplicar qualquer um dos critérios.

Determinemos assim, a título de exemplo de aplicação, o domínio de convergência da série da Equação 244.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$$
equação 244

Sendo centrada em -2, a série da Equação 244 pode ser escrita na forma da Equação 230, como podemos verificar na Equação 245.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n \sqrt{n+1}} (x+2)^n$$
equação 245

Pelo critério de d'Alembert e por Equação 241 temos a Equação 246.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{5^n \sqrt{n+1}} \right)}{\left(\frac{1}{5^{n+1} \sqrt{n+2}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \sqrt{n+2}}{5^n \sqrt{n+1}} = 5$$

equação 246

Sendo o nosso intervalo de convergência $]-2-5, -2+5[=]-7, 3[$, testamos $x = -7$ e $x = 3$, conforme podemos ver na Equação 247.

$$\text{se } x = -7: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad (\text{converge por Leibniz})$$

equação 247

$$\text{se } x = 3: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\text{divergente - série de Dirichlet})$$

Concluindo, o domínio de convergência é $[-7, 3[$. ■

Fórmula de Taylor

Consideremos uma dada função $f(x)$, como a representada na Figura 29, e um seu ponto $(c, f(c))$.

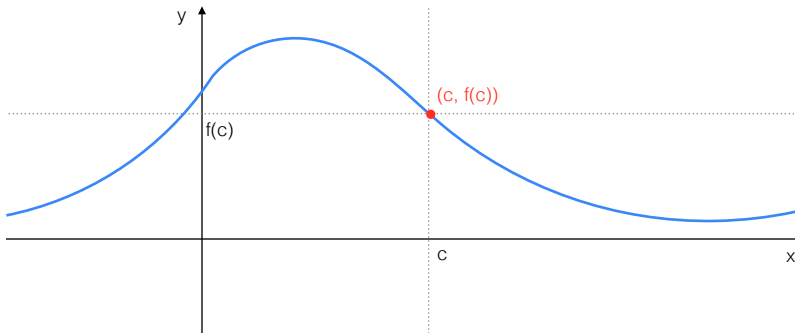


figura 29
uma função f

Dada uma função $f(x)$ como é que podemos obter a sua equação? Uma forma de o fazer (talvez até a mais ótima) é recorrendo a processos de **aproximação**. Uma aproximação é uma tentativa de redesenhar a função pretendida através de aproximações consecutivas de operações entre outras funções. Na Figura 30 podemos ver a aproximação, em seis termos, da função $f(x) = e^x$.

aproximação

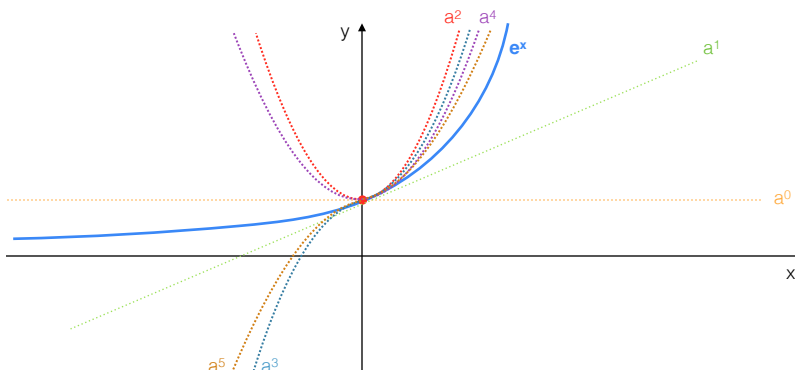


figura 30
aproximações a e^x

Portanto, às linhas de cores (à exceção da cor azul da função e^x) da Figura 30 damos o nome de aproximações. Precisamente, é isso que procuramos, sendo que nos interessa encontrar uma aproximação à função $f(x)$, centrada na abscissa c . Daí a necessidade de criar uma segunda aproximação, destacada pelas diferenças de cor das linhas, na mesma figura. A linha vermelha representa um dado polinómio $P(x)$ tal que $P(c) = f(c)$, $P'(c) = f'(c)$ e $P''(c) = f''(c)$. Para um polinómio $P(x)$ de grau superior a aproximação é muito mais otimizada.

No caso da Figura 30 analisa-se a função exponencial, então, centrada em $x = 0$. Para um polinómio do primeiro grau, analiticamente, a reta que passa pelo ponto $(0, 1)$, sendo tangente a $f(x)$ é calculada através de $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ o que por sua vez é $y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = 1 + x$. Para um polinómio do segundo grau, $P(x)$, isto é, da forma $P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, e sabendo que $P(0) = a_2 = e^0 = 1$, e que $P'(0) = (2a_0x + a_1)|_{x=0} = a_1 = e^0 = 1$, temos a Equação 248:

$$1 = e^0 = P''(x) = (2a_0)|_{x=0} = 2a_0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2}$$
equação 248

Por conseguinte, temos que $P(x) = (1/2)x^2 + x + 1$.

Mas será que em termos mais gerais há a possibilidade de efetuar uma forma comum? Por vias de um **teorema** temos que é possível provar que para $P(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n$ se verifica que $P(c) = f(c)$, $P'(c) = f'(c)$, $P''(c) = f''(c)$, $P'''(c) = f'''(c)$, ..., $P^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$ se e só se se verificar a Equação 249.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n$$
equação 249

Por conseguinte, e tendo como convenção que $f^{(0)} \equiv f$, verificamos Equação 250.

$$T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k = P(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n$$
equação 250

Por vias da expressão de Equação 250 chamamos ao polinómio em estudo, **polinómio de Taylor**, de ordem n de f , no ponto c .

© **Brook Taylor**
polinómio de Taylor

nota!! é possível provar que o polinómio de Taylor é o único polinómio, por cada f , de grau menor ou igual a n que verifica $P(c) = f(c)$, $P'(c) = f'(c)$, $P''(c) = f''(c)$, $P'''(c) = f'''(c)$, ..., $P^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$. Um exemplo da aplicação desta ideia é , por exemplo, tendo $f(x) = 2 + x - 5x^2 + x^3$: $T_0^3 f(x) = f(x)$ (porque ambas as expressões são de grau 3 e há a unicidade referida acima).

nota

Tentemos assim calcular o polinómio de Taylor da função $f(x) = e^x$, $c = 0$. Esta função é relativamente simples, dado que em termos de derivação, a derivada de e^x é a própria função. Assim, $f^{(n)}(0) = 1$. A expressão do polinómio de Taylor é a seguinte (Equação 251):

$$T_0^n e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$
equação 251

nota!! a um polinómio de Taylor centrado em $x = 0$, dá-se o nome de **polinómio de MacLaurin**.

Tentemos agora obter a expressão do polinómio de Taylor da função seno, com $c = 0$. Calculando as derivadas temos que $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ (de quatro em quatro derivadas retornamos a $f(x)$). Analogamente, calculando o valor das derivadas para $x = c = 0$, temos que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$. Daqui podemos prosseguir para a expressão final, visível em Equação 252.

$$T_0^{2n+2} \sin x = T_0^{2n+1} \sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

nota

polinómio de MacLaurin

© Colin MacLaurin

equação 252

Calculando, analogamente ao polinómio de Taylor para a função seno, a função cosseno terá um aspeto semelhante. Assim, da mesma forma por que foi obtido para a função seno, em Equação 253 temos o polinómio de Taylor para a função cosseno.

$$T_0^{2n+1} \cos x = T_0^{2n} \cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

equação 253

Em termos práticos existe uma dificuldade passível de ser enfrentada - o cálculo de derivadas sucessivas. Consideremos a seguinte expressão: $f(x) = 1/(1-x)$. Para resolver o polinómio de Taylor para este $f(x)$ temos que calcular as derivadas: $f'(x) = (1-x)^{-2}$, com $f'(0) = 1$; $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, com $f''(0) = 2$; $f'''(x) = 2 \times 3(1-x)^{-4}$, com $f'''(0) = 2 \times 3$; $f^{(4)}(x) = 2 \times 3 \times 4(1-x)^{-5}$, com $f^{(4)}(0) = 4!$. Pela tendência podemos verificar que $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)!}$, com $f^{(n)}(0) = n!$. Mas será que a fórmula está correta? Através do processo de indução matemática podemos verificar se se valida. A indução matemática é realizada em duas fases: primeiro verifica-se para o primeiro caso, fazendo $n = 0$: $0! = (1-x)^{-(0+1)!} = (1-x)^{-1} = f(0)$, e numa segunda fase há que supor que $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)!}$ é verdade e calculamos $f^{(n+1)}(x)$ como derivada de $f^{(n)}(x)$, como podemos ver na Equação 254.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x) \right)' = \left(n!(1-x)^{-(n+1)!} \right)' = n! \left(-(n+1) \right) (1-x)^{-n-1-1} (-1) \\ &= (n+1)! (1-x)^{-(n+2)} \\ &= (n+1)! (1-x)^{-((n+1)+1)} \end{aligned}$$

equação 254

Pelo processo de indução matemática a fórmula é verdadeira, qualquer que seja o n inteiro, dado que confirmámos que se a fórmula executa um dado passo, executa também para o passo seguinte.

Voltando atrás, temos que, para concluir o nosso exercício (Equação 255):

$$T_0^n \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{k!} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

equação 255

Como vimos pela introdução, o polinómio de Taylor é uma aproximação à função $f(x)$. Sendo assim, efetuando a diferença $f(x) - T_c^n f(x) \neq 0$. Ao resultado da diferença anterior damos o nome de **resto** $R_c^n f(x)$, como é visível em Equação 256.

resto

$$f(x) - T_c^n f(x) = R_c^n f(x) \Leftrightarrow f(x) = T_c^n f(x) + R_c^n f(x)$$

equação 256

Por vias de um **teorema**, se o resto $R_c^n f(x)$ for, ao tender para infinito, para zero, então $f(x)$ é especificada pela expressão da Equação 257, a qual se dá o nome de **série de Taylor** da função f em c .

teorema

série de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

equação 257

Considerando $n \in \mathbb{N}_0$, uma função f com derivadas contínuas até à ordem $n+1$ em $[a, b]$ e supondo um $c \in [a, b]$, temos que para todo o $x \in [a, b]$, podemos escrever $f(x)$ com a expressão de Equação 258, cujo segunda parcela do segundo membro da equação é uma expressão para o resto $R_c^n f(x)$.

$$f(x) = T_c^n f(x) + \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

equação 258

Na prática não é o teorema de Equação 258 que se usa, mas antes uma consequência da aplicação deste, que, por si, gerou um novo teorema, o qual, com as mesmas hipóteses que anteriormente, $\forall x \in [a, b] \setminus \{c\}$, existe pelo menos um θ entre c e x tal que a Equação 259 se verifique:

$$f(x) = T_c^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

equação 259

Tanto à expressão de Equação 258 como à de Equação 259 podemos dar o nome de **fórmulas de Taylor**. À expressão do resto de Equação 258 dá-se o nome de **resto na forma integral** (ou mais simplesmente resto integral) e à expressão do resto da Equação 259 dá-se o nome de **resto na forma de Lagrange** (ou simplesmente resto de Lagrange).

fórmulas de Taylor

resto na forma integral

resto na forma de Lagrange

© Joseph-Louis Lagrange

Consideremos a função exponencial $f(x) = e^x$. Escrevendo a fórmula de Taylor com a forma de resto de Lagrange temos a Equação 260.

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]c, x[, c = 0$$

equação 260

Verificando a expressão anterior num gráfico temos a Figura 31.

Como podemos ver na Figura 31 temos que podemos majorar e^θ , sendo que conseguimos eliminar dependências. Assim, considerando $x > 0$, então $e^\theta \leq e^x$ e se $x < 0$, então $e^\theta \leq 1$. Prosseguindo, desenvolvemos de forma a que se possa verificar a Equação 261.

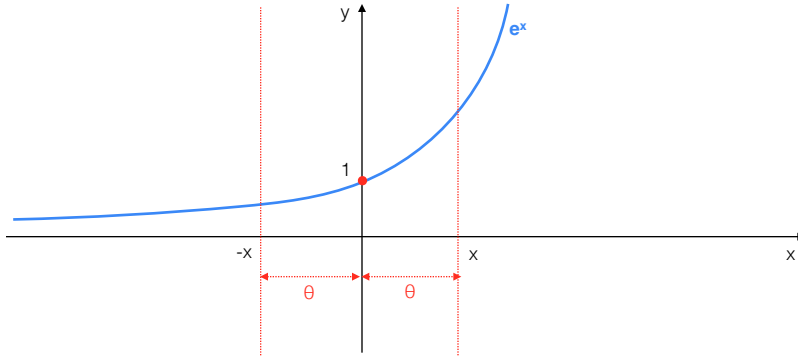


figura 31
majorantes de e^θ

$$0 \leq \left| \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{e^\theta}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

equação 261

O uso dos módulos provém da necessidade de manter as desigualdades, pelo que podemos efetuar uma comparação entre o máximo de 1 ou e^x , e $(|x|^{n+1}/(n+1)!)$, e $|(e^\theta/(n+1)!)x^{n+1}|$, como podemos ver na Equação 262.

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

equação 262

Assim, temos que o resto $R_c^n f(x)$, com n no infinito, tende para 0, pelo que e^x toma a expressão de Equação 251. ■

Num segundo exemplo, temos a função seno, pela qual podemos escrever a seguinte expressão (Equação 263):

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!} + \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \exists \theta \in]c, x[, c = 0$$

equação 263

Para a função seno existe um majorante claro que é 1. Assim $|f^{(2n+2)}(\theta)| \leq 1$. Pela mesma ordem de raciocínio, temos a Equação 264.

$$0 \leq \left| \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

equação 264

Assim, temos que o resto $R_c^n f(x)$, com n no infinito, tende para 0, pelo que $\sin x$ toma a expressão de Equação 252. ■

Consideremos agora uma nova função $f(x)$, com a expressão da Equação 265.

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

equação 265

Sendo $f(x)$ uma função contínua e tendo ela derivada em todas as ordens, é possível provar que qualquer que seja k , a derivada de ordem k de $f(x)$ é sempre 0.

Assim, podemos construir a sua série de Taylor. De acordo com a definição de série de Taylor temos a Equação 266.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

equação 266

Mas $f \neq 0$, ou seja, não podemos ter uma função com as características, sendo a sua fórmula de Taylor convergente, mas não para a função inicial. A este tipo de séries dá-se o nome de **séries não-analíticas**, contrariamente aos casos anteriores estudados, em que todas são **analíticas**, isto é, podendo-se escrever como séries de potências.

**séries não-analíticas
analíticas**

Numa calculadora, geralmente, é executada a fórmula de Taylor para o cálculo das exponenciais e funções trigonométricas. Por exemplo, para um x particular ($x = 1$) temos a Equação 267.

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

equação 267

Como será a especificação de $R_0^3 e^x|_{x=1}$? Vejamos como é que a calculadora resolveria este processo; θ está entre 0 e 1, pelo que e^θ está entre 1 e e , em particular 1 e 3 (Equação 268):

$$\left(R_0^3 e^x\right)\Big|_{x=1} = \frac{e^\theta}{4!} 1^4 = \frac{e^\theta}{4!} \therefore \frac{1}{4!} \leq \left(R_0^3 e^x\right)\Big|_{x=1} < \frac{3}{4!}$$

equação 268

Podemos agora afirmar que se calcularmos $1+1+(1/2)+(1/3!)$ teremos um valor aproximado de e com um erro menor que $(3/4!)$. Sendo $1+1+(1/2)+(1/3!) = 2,6$ e $(3/4!) = 0.125$ temos que $2,6 \leq e < 2,6+0.125=2.761(6)$. Por enquanto, só sabemos que as unidades de e são 2, não podendo aferir que 7 é o algarismo das décimas. Usando o erro máximo teríamos que $2,6 + (1/4!) = 2,708(3) \leq e < 2,791(6)$. Como o algarismo 7 aparece em ambos os lados da desigualdade, temos agora a certeza que e tem 2 unidades e 7 décimas. Prosseguindo o mesmo raciocínio, podemos obter um valor cada vez mais aproximado de e .

5. Sucessões e Séries de Funções

Ora anteriormente já referimos séries de funções, como a série da Equação 269, onde o termo da mesma, ao invés de ser um número, é uma função:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \leftarrow f(x) := x^n$$

equação 269

Do mesmo modo para as sucessões, onde uma sucessão de funções, cada seu termo, ao invés de ser um número, é uma função, como na Equação 270:

$$(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \leftarrow f(x) := x^n$$

equação 270

Em geral podemos afirmar que a $\sum f_n(x)$ é uma **série de funções** onde $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x)$, com D sendo igual para todas as f_n , e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma **sucessão de funções**, onde $u_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto u_n(x)$, com D sendo igual para todas as u_n .

Analogamente ao nosso estudo de séries numéricas, comecemos por sucessões de funções, de forma a poder tratar das séries de funções mais facilmente. Tomemos assim, primeiramente, como exemplo a expressão da Equação 271.

$$(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } u_n(x) = x^n, x \in [0,1]$$

equação 271

Analisando este último exemplo temos que para cada $x \in [0,1]$, podemos calcular o limite em $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n) = 1$ se $x = 1$ ou 0 se $x \in [0,1[$. Como podemos averiguar, sendo a função contínua, a expressão sucessiva não o é. Geometricamente, na Figura 32, a sucessão mostra o seu comportamento divergente.

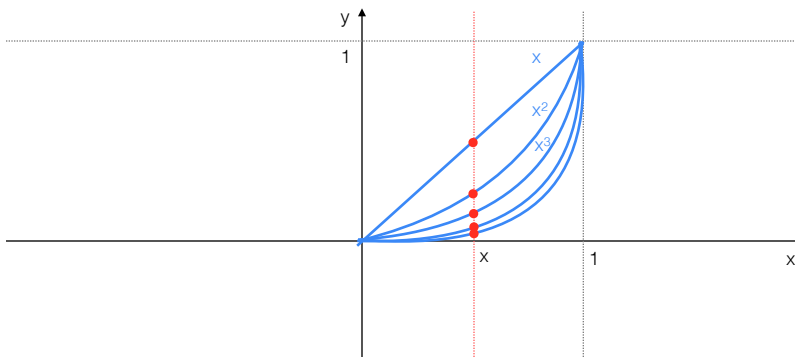


figura 32
sucessão

Na Figura 32 podemos reparar que ao longo do aumento do valor de n , em x^n , o gráfico aparenta ficar mais "reto", gerando uma tendência em formar uma reta $y=0$ até $x=1$ e depois uma reta vertical até $y=1$, em $x=1$. O valor de y em x também tende para 0, de n para n .

Um segundo exemplo será a expressão da Equação 272.

$$(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } u_n(x) = \frac{x^n}{2}, x \in [0,1]$$

equação 272

Analisando este último exemplo temos que para cada $x \in [0,1]$, podemos calcular o limite em $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n/n) = 0$. Mais uma vez, graficamente, podemos verificar o seu comportamento através da Figura 33.

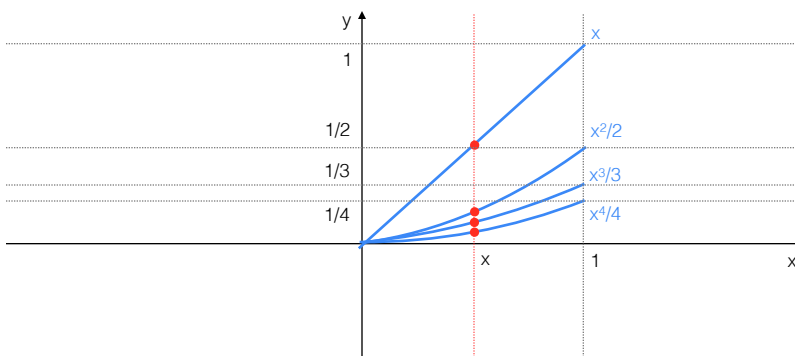


figura 33
sucessão

Na Figura 33 esclarecemos facilmente o porquê de $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n/n) = 0$.

Definimos assim, considerando $u_n, u : D \rightarrow \mathbb{R}$, que se diz que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge pontualmente** para u se se verificar Equação 273.

converge pontualmente

$$\forall x \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$$

equação 273

Por outro lado, dadas $u_n, u : D \rightarrow \mathbb{R}$, diz-se que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformemente** para u se se verificar Equação 274.

converge uniformemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} |u_n(x) - u(x)| \right) = 0$$

equação 274

Na Equação 274 "sup" é o **supremo** do seu argumento. No caso do exemplo da Figura 32 temos que, sendo o supremo $\sup_{x \in [0,1]} |x^n - u(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$, este não é uniforme. Já no caso do exemplo da Figura 33, temos que o supremo $\sup_{x \in [0,1]} |(x^n/n) - u(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$, pelo que é uniforme.

supremo

Enunciemos assim a seguinte **proposição**, onde se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $u_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, então também converge pontualmente para u . Em prova, temos que qualquer que seja $x \in D$, supondo que há convergência uniforme verifica-se Equação 275.

proposição

$$0 \leq |u_n(x) - u(x)| \leq \sup |u_n(a) - u(a)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

equação 275

Pelo **teorema das sucessões encaixadas**, temos a Equação 276.

teorema

$$|u_n(x) - u(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ ou seja, } u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$$

equação 276

Em termos práticos há que calcular sempre se existe limite lateral pontual. Caso não haja, então não haverá nem convergência pontual, nem convergência uniforme. Caso haja limite, substitui-se $u(x)$ no cálculo para a convergência uniforme e caso haja limite é uniforme, caso contrário é apenas pontual.

Consideremos agora um novo teorema, no qual sendo $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funções contínuas tais que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

- se a convergência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para u for uniforme, então u é contínua (além disso, u é integrável e verifica-se Equação 277):

$$\int_a^b u(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

equação 277

- se existirem $u'_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, se forem contínuas e se $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergirem pontualmente, então existe u' e $\forall x \in [a, b]$, podemos calcular $u' = (\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x))'$ trocando a derivada pelo limite (Equação 278):

$$u'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(x), \forall x \in [a, b]$$

equação 278

Consideremos agora séries de funções. Primeiro tratemos de esclarecer que tipos de convergência são possíveis. Assim, primeiramente, dada $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, diz-se que $\sum f_n$ **converge pontualmente** para $f(x)$ se $\forall x \in D$, se se verificar Equação 279.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

equação 279

Por outro lado, dadas $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, diz-se que $\sum f_n$ **converge uniformemente** para $f(x)$ se a sucessão das somas parciais da série convergir uniformemente para $f(x)$, ou seja, se se verificar a Equação 280.

converge uniformemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x) \right| \right) = 0$$

equação 280

Critério de Weierstrass

Se tiver um determinado conjunto de funções f_n que parte de um domínio $D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}$, se $|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$ e $\sum a_n$ converge, então verifica-se Equação 281.

© Karl Weierstrass

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ converge uniformemente (e absolutamente) em } D$$

equação 281

Tentemos aplicar este critério à série $\sum x^n$. Já vimos que esta série converge (até pontualmente) se e só se $|x| < 1$, isto é, o seu domínio de convergência é $] -1, 1[$. Usando o critério de Weierstrass temos a Equação 282.

$$\forall x \in [-r, r], |x^n| = |x|^n \leq r^n, \sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ converge (pois } |r| < 1), r \in]0, 1[$$

equação 282

Então, pelo critério de Weierstrass converge uniformemente em $[-r, r]$, pelo que esta convergência uniforme é muito bem validada pela Equação 283.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in]-1, 1[} \left| \sum_{i=0}^{n-1} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} x^i \right| \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in]-1, 1[} \left| \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in]-1, 1[} \left| \frac{1-x^n-1}{1-x} \right| \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in]-1, 1[} \left| \frac{|x|^n}{1-x} \right| \right) = \infty \end{aligned}$$

equação 283

A série não converge uniformemente para $] -1, 1[$. ■

Por via de um **teorema**, se considerarmos uma série de potências $\sum a_n(x-c)^n$ centrada em c com raio de convergência $R \neq 0$, o máximo que se pode afirmar é que a série converge uniformemente em qualquer intervalo $[a, b]$ dentro de $]c-R, c+R[$. Num

teorema

outro teorema (**teorema de Abel**), temos que, nas mesmas condições do teorema anterior, se a série convergir no extremo $c+R$ (respetivamente $c-R$) então converge uniformemente em qualquer intervalo da forma $[a, c+R]$, $\forall a \in]c-R, c+R[$ (ou também $[c-R, b]$, $\forall b \in]c-R, c+R[$).

Um último **teorema** diz-nos que, seja $\sum a_n(x-c)^n$ com raio de convergência $R \neq 0$. Então:

- f é contínua no domínio de convergência da série;
- f é diferenciável em $]c-R, c+R[$ e verifica-se Equação 284;

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x-c)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) (x-c)^n$$

teorema

© Niels Henrik Abel

teorema

equação 284

- $\forall [a, b]$ contido no domínio de convergência da série, verifica-se Equação 285.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x-c)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} \right]_{x=a}^{x=b}$$

equação 285

$$(\text{em particular}): \quad \int_c^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}, \forall x \in \text{domínio de convergência}$$

Como consequências da aplicação deste último teorema, temos que:

- se $f(x)$ se pode escrever como $f(x) = \sum a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$, com raio de convergência $R > 0$, então $f(c) = a_0$ e $f'(x) = 0 + a_1 + 2 \cdot a_2(x-c) + \dots$, logo $f'(c) = a_1$ e $f''(x) = 0 + a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x-c) + \dots$, logo, $f''(c) = 2a_2$, ... Prosseguindo indefinidamente, temos que, iremos obter, em particular, a Equação 286:

$$f^{(n)}(c) = n! a_n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

equação 286

- se $f(x)$ for representada por uma série de potências com $R > 0$ à volta de um centro c , então tem derivadas finitas de todas as ordens numa vizinhança de c .⁷

Contrariamente à forma como elaborámos o nosso conhecimento relativo a determinadas expressões, verifiquemos a fórmula da derivação de e^x através das respetivas representações em séries de potências (Equação 287).

$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)'$$

equação 287

⁷ Numa avaliação da disciplina pode-se pedir para saber se é possível representar uma série de potências num ponto de uma expressão, mas podemos afirmar logo que não, caso soubermos à partida, que não há pelo menos uma derivada nesse ponto.

Como n é constante aos olhos da derivação, há que efetuar o seguinte desenvolvimento, tal como podemos ver na Equação 289.

$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1}$$

equação 289

Por convenção, sabemos que $n!$ sendo $n = 0$ é 1, mas, fora convenções, em casos deste tipo, é conveniente designar o caso de $n = 0$ como algo mais especial. Aqui, com $n = 0$, o cálculo é 0, pelo que podemos escrever a série da mesma forma, partindo de 1 (Equação 290).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

equação 290

■

A mesma operação pode ser executada com a função seno e cosseno.

Séries de Fourier

Consideremos os integrais da Equação 291.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx$$

equação 291

Aparentemente, estes integrais são muito simples de resolver, mas vejamos em termos gráficos, como é visível na Figura 34.

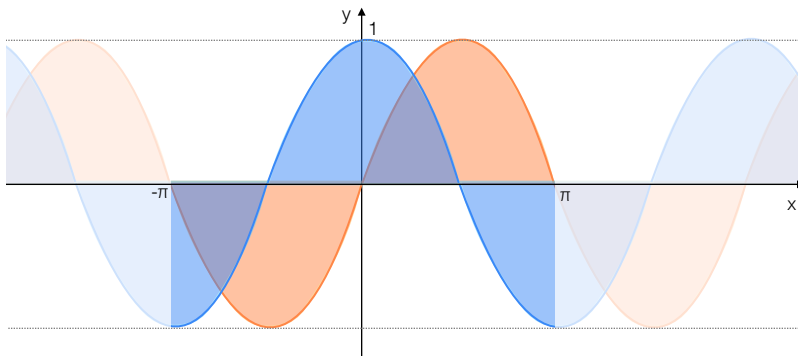


figura 34

integrais de seno e cosseno

Podemos ver que, dadas áreas negativas e positivas, em módulo, iguais, os integrais dão 0. Alterar $\sin x$ para $\sin(nx)$, com $n \in \mathbb{Z}$ faz com que haja mais oscilações entre $-\pi$ e π , dando na mesma 0, ou seja, eis a Equação 292.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 2\pi & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

equação 292

Consideremos agora o integral da Equação 293.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx = ?$$

equação 293

Através de uma fórmula trigonométrica, podemos reescrever a Equação 293 na Equação 294.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)) dx = 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

equação 294

E o seguinte integral, da Equação 295?

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

equação 295

Relação de ortogonalidade

Em suma, as várias **relações de ortogonalidade** (mais importantes para o nosso estudo) são as seguintes (Equação 296):

relações de ortogonalidade

$$(a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$$

equação 296

$$(b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$(c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

Séries trigonométricas

Uma **série trigonométrica** é uma expressão da forma da Equação 297.

série trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

equação 297

Na expressão da Equação 297 $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ são duas funções periódicas de período $T = 2\pi$.⁸

Relativamente à expressão acima, se esta série convergir, a sua soma será uma função periódica de período $T = 2\pi$.

Supondo que a série acima converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$ para $f(x)$, então temos a Equação 298.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) dx \right) \\ \therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right) \end{aligned}$$

equação 298

⁸ Relembrando, diz-se que $T > 0$ é período de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se $f(x+T) = f(x)$, qualquer que seja x real.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot 0 + b_n \cdot 0)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + 0$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} + 2\pi \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Na Equação 299 podemos discutir em que termos é que $m = n$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos(mx) dx \right) \quad \text{equação 299}$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(mx) dx + 0 \right)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(mx) dx \right)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m\pi \Leftrightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

Concluindo, podemos então escrever a Equação 300.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

equação 300

Temos assim a seguinte definição: dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π , chama-se **série de Fourier** de f a série que estruturalmente têm a expressão da forma de Equação 297, onde a_n e b_n são dadas pelas fórmulas acima.

série de Fourier

© Joseph Fourier

Há, no entanto, umas observações a ser feitas:

- a série de Fourier pode não convergir;
- quando a série de Fourier converge, converge para uma função diferente de f ;
- uma série trigonométrica pode convergir para uma função f e não ser a série de Fourier de f (por exemplo, a série $\sum ((1/\sqrt{n}) \sin(nx))$);
- sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π , podemos usar qualquer intervalo de amplitude 2π ao invés de $[-\pi, \pi]$, para fazermos as integrações no cálculo de a_n e b_n ;
- se f for par, $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ e a_n tem o valor da Equação 301 (a); se f for ímpar, $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ e b_n tem o valor da Equação 301 (b).

$$(a) \quad a_n = 2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$(b) \quad b_n = 2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

equação 301

Calculemos assim, a série de Fourier de período 2π tal que $f(x) = |x|$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Primeiro há que ver se a função em estudo é par, ímpar, ou nenhuma das duas - sendo a função módulo, esta é par, pelo que $b_n = 0$ e a_n pode ser calculado da forma exposta em Equação 302.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx && \text{equação 302} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(nx)}{n} x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} 1 dx \right), n \neq 0 \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin(nx) \pi - 0 - \frac{1}{n} [\cos(nx)]_0^\pi \right) \\
 &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \\
 &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Assim sendo, a_0 é obtido pela Equação 303.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \pi \quad \text{equação 303}$$

Através da Equação 303 podemos criar Equação 304 onde escrevemos a nossa série de Fourier da função f .

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) \right) \quad \text{equação 304}$$

A relação da Equação 304 representa-se, mais corretamente, da forma explícita como a da Equação 305, onde " $\sim$ " indica que é uma série de Fourier.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(mx)) \quad \text{equação 305}$$

Se f estiver definida apenas em $f:]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ ou $f: [-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ chama-se série de Fourier de f à série de Fourier de extensão periódica de período 2π de f a $\mathbb{R}$. Se $f: [-\pi, \pi]$ se verificar, verifica-se o valor de um dos extremos antes de se fazer a extensão e a série de Fourier dessa extensão também se diz série de Fourier de f de f . Em qualquer um destes dois casos, supõe-se que em $[-\pi, \pi]$ a extensão é integrável.

Por vezes é útil, em situações práticas, sabes se a série só tem senos ou só cossenos. Consideremos assim a seguinte função $f(x) = x$, $\forall x \in [0, \pi]$. Para termos uma série de Fourier exclusivamente com cossenos, fazemos uma extensão de f par.

Analogamente, para termos uma série de Fourier com cossenos, fazemos uma extensão de f ímpar.

1. Transformada de Laplace

Transformada inversa de Laplace.....	12
--------------------------------------	----

2. Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Problemas de valor inicial e equações de variáveis separáveis.....	19
Equações lineares de primeira ordem.....	21
Equações diferenciais ordinárias homogêneas	24
Equações diferenciais ordinárias de Bernoulli	28
Equações lineares de ordem n , arbitrária.....	28
EDOs homogêneas lineares de ordem n com coeficientes constantes	30
EDOs lineares completas de ordem n com coeficientes constantes	31
Método da variação das constantes	34
Trajetórias ortogonais.....	38

3. Séries Numéricas

Conceitos básicos.....	40
Séries geométricas.....	41
Séries redutíveis, de Mengoli ou telescópicas.....	42
Séries de termos não negativos	47
Crítério de Cauchy.....	50
Crítério de d'Alembert.....	51
Séries alternadas e critério de Leibniz	52
Fator comutatividade e associatividade em séries por natureza	53

4. Séries de Potências e Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor.....	58
------------------------	----

5. Sucessões e Séries de Funções

Crítério de Weierstrass.....	66
Séries de Fourier	68
Relação de ortogonalidade.....	69
Séries trigonométricas.....	69

Apontamentos de Cálculo II

1ª edição - junho de 2015

C2

Autor: Rui Lopes

Fontes bibliográficas: Cálculo - Volume I, STEWART, James; Analyse Mathématique, DEMENGEL, Gilbert; Principles of Real Analysis, ALIPRANTIS, Charalambos D. et BURKINSHAW, Owen; Cálculo com funções de várias variáveis, BREDÁ, Ana d'Azevedo et DA COSTA, Joana Nunes.

Outros recursos: --

Agradecimentos: Professor António Caetano.

Todas as ilustrações gráficas são obra de Rui Lopes e as imagens são provenientes das fontes bibliográficas divulgadas.



apontamentos

© Rui Lopes 2015 Copyright: Pela Creative Commons, não é permitida a cópia e a venda deste documento. Qualquer fraude será punida. Respeite os autores e as suas marcas. Original - This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.en_US.