www.esffranco.edu.pt

(2023/2024)

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 17

1.º Período | 30/11/2023 | Duração: 90 minutos

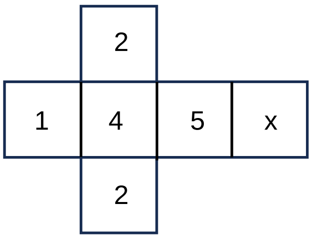
Nome: ____________________________________ N.º:

Classificação: ___ , ___ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere um dado cúbico equilibrado, cuja planificação se encontra ao lado.



Tal como essa figura sugere, cinco das faces estão numeradas com os números 1, 2, 4 e 5 e apenas uma contém a letra x, que representa um certo número.

Lança-se o dado uma vez e observa-se a face que fica voltada para cima.

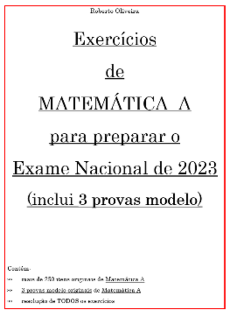
Considere os acontecimentos:

N : «A face contém um número primo»;

M : «A face contém um número divisor de 5».

Sabendo que os acontecimentos N e M são independentes, qual pode ser o valor de x?

(A) 6 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 2



2. Algumas dezenas de turistas embarcaram num navio de cruzeiro.

2.1. Para visitar uma cidade, 4 turistas europeus, 2 japoneses e 2 americanos alugaram uma carrinha de oito lugares, sendo dois desses lugares à frente.

Sabe-se que apenas os turistas europeus podem conduzir e que os japoneses não querem se sentar à frente.

De quantas maneiras diferentes podem ser distribuídos os turistas na carrinha?

(A) 2880 **(B)** 5760 **(C)** $14\ 400$ **(D)** $28\ 800$

2.2. Foram analisados 500 formulários preenchidos pelos turistas que embarcaram no navio de cruzeiro.

Concluiu-se que:

• 200 turistas estão em lua de mel;

• dos turistas que estão em lua de mel, metade está instalada numa *suite*;

• dos turistas que não estão em lua de mel, a quinta parte não está instalada numa *suite*.

Escolhe-se, ao acaso, o formulário de um turista que está instalado numa *suite*.

Determine a probabilidade de o formulário escolhido pertencer a um turista que não está em lua de mel.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

Adaptado do Exame Nacional de MACS, 2.ª fase de 2023

3. O Belarmino gosta de jogar ténis e padel e em casa tem dois sacos com bolas desses desportos.

Um dos sacos tem só bolas de ténis e o outro tem bolas dos dois desportos.

3.1. Sabe-se que, 7 em cada 10 vezes, o Belarmino escolhe, para treinar, o saco só com bolas de ténis.

Num certo dia, ele abriu um dos sacos e tirou uma bola de ténis.

Sabendo que a probabilidade de terem ficado bolas de padel no saco é $\frac{5}{19}$, determine a probabilidade de a bola ser de ténis se for desse saco.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3.2. Suponha que o saco com as bolas dos dois desportos tem 30 bolas de ténis e 18 de padel.

O Belarmino seleciona, sucessivamente, ao acaso e sem reposição, três bolas.

Considere os acontecimentos:

A : «A primeira bola é de ténis»;

B : «A segunda bola é de ténis»;

C : «A terceira bola é de ténis».

Indique o valor de $P\left(\overline{C}\,|\,(A\cap B)\right)$, na forma de fração irredutível, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P\left(\overline{C}\,|\,(A\cap B)\right)$ no contexto da situação descrita.

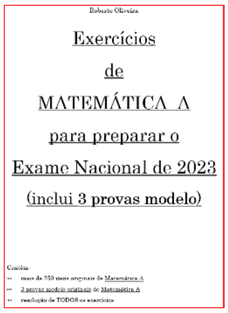
4. Seja Ω, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega$), com $P(A)\neq 0$.

Sabendo que A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis, mostre que

$$P(A\cup B)=\frac{1+P\left(B\,|\,\overline{A}\right)}{2}$$

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{4x^2+5}}{4} & \text{se } x<-1\\ \frac{3}{4} & \text{se } x=-1\\ \frac{x^3+3x^2-2}{2x^2-2} & \text{se } x>-1\end{cases}$.



Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), resolva as alíneas **5.1.** e **5.2.**.

5.1. Mostre que a função f é contínua em $x=-1$.

5.2. Quando $x\to-\infty$, o gráfico de f admite uma assíntota oblíqua.

Determine o declive dessa assíntota.

5.3. Quanto às assíntotas verticais do gráfico de f, conclui-se que:

(A) Existe apenas uma, de equação $x=-1$; **(B)** Existe apenas uma, de equação $x=1$;

(C) Existem duas, de equações $x=0$ e $x=1$; **(D)** Não existem.

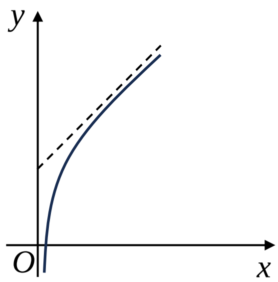
6. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:

- $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$;
- $\lim_{x\to +\infty} \left(h(x) - x + 3\right) = 0$.

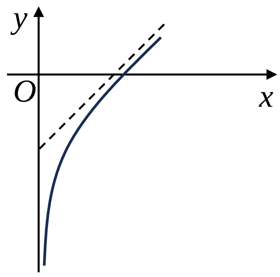
Em cada uma das alternativas apresentadas abaixo, está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Em qual das alternativas pode estar representado o gráfico de h ?

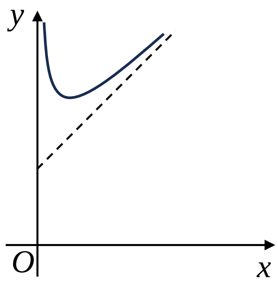
(A)



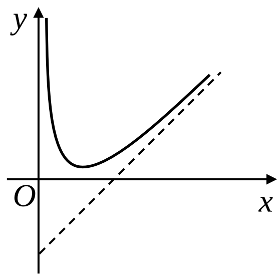
(B)



(C)



(D)



7. Seja g a função, de domínio $[-2, 2]$, definida por $g(x) = x^3 - 3x + 5$.

Considere a equação $g(x) = 4$.

7.1. Recorra ao teorema de Bolzano-Cauchy para provar que a equação anterior é possível no intervalo $]-2, 2[$.

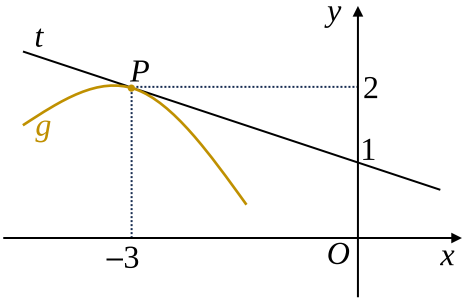
7.2. Utilizando a calculadora gráfica, determine a distância entre os pontos A e O, onde:

- A é, de entre os pontos de interseção entre o gráfico de g e a reta de equação $y = 4$, aquele que tem a menor abcissa;
- O é a origem de um referencial.

Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- assinale o ponto A e apresente a sua abcissa com arredondamento às centésimas;
- apresente a distância pedida arredondada às décimas.

8. Considere, no referencial xOy da figura, parte do gráfico da função g, diferenciável em $\mathbb{R}$, e a reta t, tangente ao gráfico de g no ponto $P(-3,2)$ e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{g(-3)-g(x)}{x+3}$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{2}$ **(D)** $-\frac{3}{2}$

9. Considere a função f, diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{4}\right\}$, definida por $f(x)=\dfrac{5}{4x+1}$.

Calcule, usando a definição de derivada num ponto, $f\,'(6)$.

10. Seja g uma função, diferenciável em $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\sqrt{a\,x}$, sendo a um número real positivo.

Mostre que, independentemente do valor de a, o gráfico de g admite, em $x=a$, uma reta tangente paralela à reta de equação $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	**10.**	
8	8	16	16	16	16	16	16	8	8	16	16	8	16	16	**200**

PASSATEMPO: Conheces os teus colegas? No último teste, a média da turma foi 11,2. Se acertares na média deste teste, podes ganhar até 8 pontos: se a tua média estiver correta, ganhas 8 pontos, se falhares por 0,1, ganhas 6, se falhares por 0,2, ganhas 5, se falhares por 0,3 ou 0,4, ganhas 4, se falhares por 0,5 ou 0,6, ganhas 3, se falhares por 0,7 ou 0,8, ganhas 2 e se falhares por 0,9 ou 1, ganhas 1 ponto.
Indica a média da turma (com 2 c.d.) que pensas ser: