www.esffranco.edu.pt
(2021/2022)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 18

3.º Período 01/06/2022 Duração: 100 minutos

Nome: N.º:

Classificação: ___ ___ , ___ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Lança-se um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, cinco vezes e escrevem-se, da esquerda para a direita, os algarismos saídos, obtendo-se, assim, um número com cinco algarismos.

Determine a probabilidade de esse número ser um divisor de 5 e ter apenas dois algarismos 3.

Apresente o resultado na forma de dízima, com cinco casas decimais.

2. No conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, sabe-se que os números z_1 e z_2 são as raízes quadradas de um outro número w.

Sabendo que $\operatorname{Arg}(z_1) \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, qual dos seguintes números pode representar z_2 ?

(A) $e^{i\frac{\pi}{5}}$ **(B)** $e^{i\frac{3\pi}{5}}$ **(C)** $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ **(D)** $e^{-i\frac{\pi}{4}}$

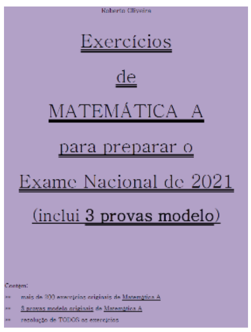
3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = \frac{-1024e^{i\frac{\pi}{4}}}{\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i\right)^{10}}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o número z na forma trigonométrica (com um argumento em $]-2\pi, 2\pi[$).

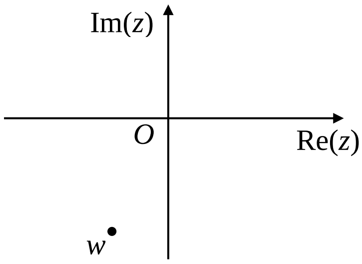
4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \frac{8+6i}{3-4i}$ e $z_2 = 25i$.

Determine, sem recorrer à calculadora, as raízes cúbicas de $z_1 + z_2$.

Apresente essas raízes na forma algébrica.



5. No plano complexo da figura, está representada, no terceiro quadrante, a imagem geométrica do número complexo w.



Qual é o número complexo que pode ser igual $\overline{2iw}$?

(A) $2+4i$ **(B)** $4+2i$

(C) $-2+4i$ **(D)** $-4+2i$

6. Considere, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, o número $z = e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

Determine o menor número natural n para o qual que z^n é um número real negativo.

7. Considere, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, os números $z = 8 - i$ e $w = 1 + bi$, sendo b um número real.

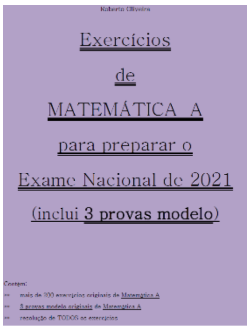
Sabendo que o afixo de w está no quarto quadrante e que $|w - z| = 8$, determine b.

8. Um modelo que dá a população da União Europeia, em milhões de habitantes, é a função P, definida por $P(t) = 440e^{0,002t}$, t anos depois de 2010.

8.1. Desde o início da contagem e até 2015, houve um aumento da população da União Europeia.
De quanto foi esse aumento (em percentagem e arredondado às unidades)?

(A) 1% **(B)** 2% **(C)** 5% **(D)** 6%

8.2. Determine x, com aproximação às unidades, tal que $P(t+x) = 1,5P(t)$.
Interprete o resultado obtido no contexto do problema.



9. Considere a função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = 2\operatorname{sen}(3x) + 3x + 1$.

9.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

9.2. Dado $k \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, sabe-se que a taxa média de variação da função f em $[0,k]$ é igual a 2.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de k, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

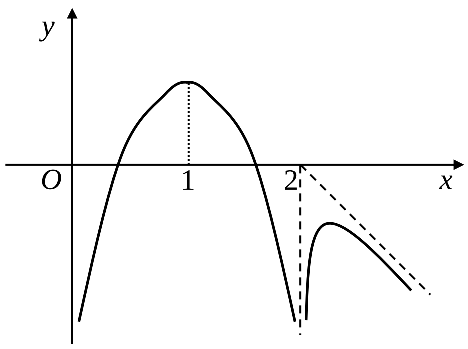
Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

10. Na figura, está representada parte do gráfico da função g, diferenciável em $\mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$.



Considere as seguintes proposições.

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$

(ii) $g'(1) = 0$

(iii) $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$

São falsas as proposições:

(A) **(i)** e **(ii)** **(B)** **(i)** e **(iii)** **(C)** **(ii)** e **(iii)** **(D)** **(i)**, **(ii)** e **(iii)**

11. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{e^{2-x}-1} + k & \text{se } x < 2 \\ \frac{x-2}{e^{x-2}} - 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, onde k é um número real.

11.1. Determine k, sabendo que a função f é contínua em $x = 2$.

11.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal ao seu gráfico quando $x \to +\infty$ e, caso exista, escreva a sua equação.

12. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

12.1. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2e} \frac{g(x) - g(2e)}{2e - x}$?

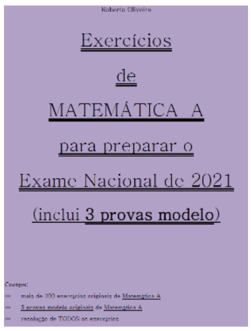
(A) $-\frac{2e}{\ln 4}$ **(B)** $\frac{2e}{\ln 4}$ **(C)** $-\frac{\ln 2}{4e^2}$ **(D)** $\frac{\ln 2}{4e^2}$

12.2. Mostre que o gráfico de g interseta a bissetriz dos quadrantes pares em $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
Sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

13. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{\frac{x}{4}+2}$.

Existe uma única reta tangente ao gráfico de f e que passa na origem do referencial.

Determine o declive dessa reta.



FIM

COTAÇÕES

Item																	
Cotação (em pontos)																	
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	
12	8	16	16	8	12	12	8	12	16	12	8	16	12	8	12	12	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\ \cos b+\operatorname{sen}b\ \cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\operatorname{sen}a\ \operatorname{sen}b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad (k\in\{0,\dots,n-1\} \text{ e } n\in\mathbb{N})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\quad (p\in\mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'\ v+u\ v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}u'\quad (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen}u)'=u'\ \cos u$

$(\cos u)'=-u'\ \operatorname{sen}u$

$(\operatorname{tg}u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\ e^u$

$(a^u)'=u'\ a^u\ \ln a\quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}\quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$