www.esffranco.edu.pt
(2021/2022)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 18

2.º Período 16/03/2022 Duração: 100 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Alguns amigos resolveram alugar uma carrinha de doze lugares sentados para os levar à praia. No entanto, alguém fez mal as contas pois apareceram dezasseis amigos. Assim, quatro deles terão de ir de pé (sem lugar definido).

1.1. Sabe-se que apenas podem guiar a carrinha o Tony, o Fred e a Zé.

De quantas maneiras diferentes se podem distribuir os dezasseis amigos pelos doze lugares disponíveis na carrinha?

(A) $3!\times 11!\times {}^{15}C_4$ **(B)** $3\times 11!\times {}^{15}C_4$ **(C)** $3\times {}^{15}C_4$ **(D)** $3!\times {}^{15}C_4$

1.2. Nesse grupo de amigos, há sete raparigas. Curiosamente, três raparigas e três rapazes têm fato de banho de cor preta.

Depois de chegar à praia, os dezasseis amigos vão sair da carrinha, um de cada vez.

Considere os acontecimentos seguintes.

A : «A primeira pessoa a sair da carrinha é uma rapariga.»

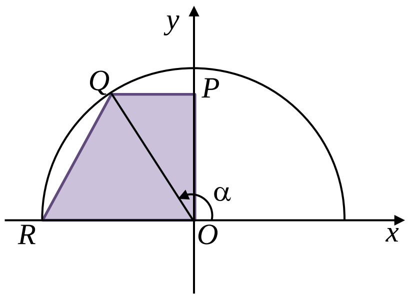
B : «A segunda pessoa a sair da carrinha é um rapaz.»

C : «A segunda pessoa a sair da carrinha tem fato de banho de cor preta.»

Indique o valor de $P\left(\left(B\cap\overline{C}\right)|\,A\right)$ sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P\left(\left(B\cap\overline{C}\right)|\,A\right)$ no contexto da situação descrita.

2. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, a semicircunferência de centro em O e raio 2 e o trapézio $[OPQR]$.



Sabe-se que:

- o segmento de reta $[OR]$ é um raio da semicircunferência;
- o ponto P pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o ponto Q pertence à semicircunferência e ao segundo quadrante e tem a mesma ordenada de P ;
- α é a inclinação da reta OQ $\left(\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$.

2.1. Mostre que a área do trapézio $[OPQR]$ é dada pela função A, definida por

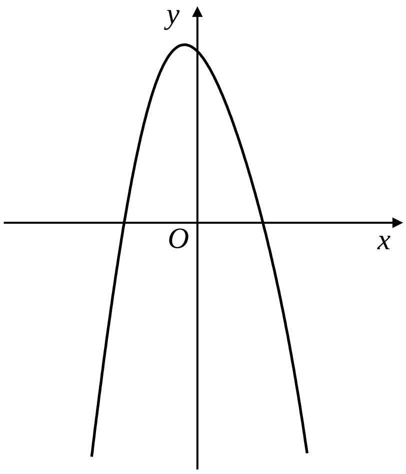
$$A(\alpha)=2\,\text{sen}\,\alpha-\text{sen}(2\alpha)$$

2.2. Mostre que existe um valor de α para o qual a área do trapézio $[OPQR]$ é máxima e determine esse α.

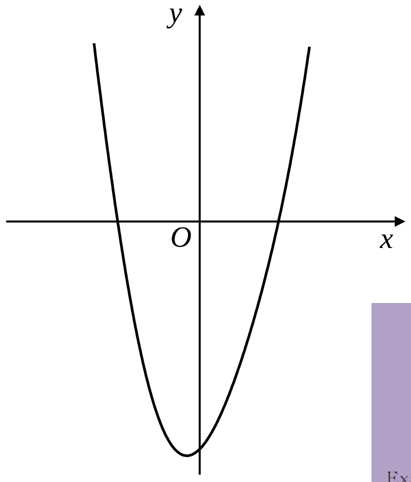
3. De uma função h, diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua segunda derivada é dada por $h''(x) = \text{sen}\, x - 2$.

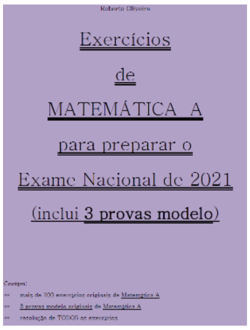
Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função h ?

(A)

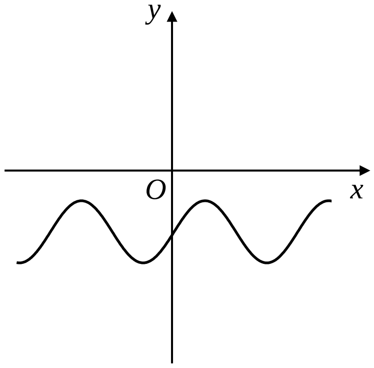


(B)

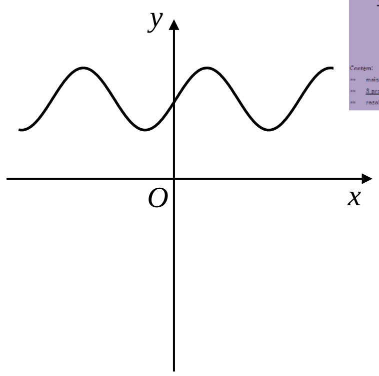




(C)



(D)



4. Por causa do mar revolto, um navio aproxima-se devagar de um porto de abrigo.

Seja $d(t)$ a distância, em milhas náuticas, do navio ao porto de abrigo, t horas após as zero horas do dia 5 de março.

Admita que $d(t) = 5\cos(0{,}3t) - t + 20$, com $t \in [0, 20]$ (o argumento da função cosseno está expresso em radianos).

4.1. A quantas milhas náuticas do porto de abrigo (com aproximação às décimas) estava o navio no dia 5 de março às 4 horas e 30 minutos?

(A) 16,6 **(B)** 15,3 **(C)** 14,0 **(D)** 12,7

4.2. Decorridas t_1 horas após o início da contagem, a distância do navio ao porto é igual a um certo valor.

Sabe-se que, passado igual período de tempo, a distância do navio ao porto é igual a 20% desse valor.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5. Considere:

• a função *f*, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+3\pi)}{x}$;

• a sucessão (u_n), definida por $u_n=\left(1-\dfrac{3}{5n-8}\right)^{n^2+2}$.

Quanto ao valor de $\lim f(u_n)$:

(A) É igual a 1; **(B)** É igual a -1; **(C)** É igual a 0; **(D)** Não existe.

6. Considere as funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x)=e^{x-3}+4x-13 \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{3-x} & \text{se } x<3\\ 1-2\log_2\left(x^2-1\right) & \text{se } x\geq 3\end{cases}.$$

6.1. Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

6.2. Existe um número superior a 3, na função g, tal que a sua imagem é igual a -17.
Qual é esse número?

(A) $\dfrac{\ln 9}{2}$ **(B)** $\ln 9$ **(C)** $\sqrt{513}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{513}}{2}$

6.3. Mostre que a função g é contínua em $x=3$.

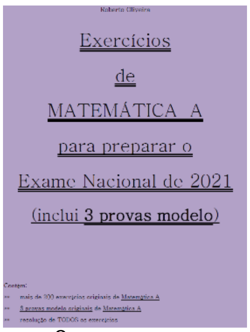
6.4. Mostre que a equação $g(x)=-6$ é possível em $]0,4[$.
Se usar cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

7. Escreva os conjuntos seguintes usando a notação de intervalos de números reais.

7.1. $A=\left\{x\in\mathbb{R}: 3^{x+1}-2\times 3^{x-1}\geq 14\right\}$

7.2. $B=\left\{x\in\mathbb{R}: e^{2x}-4e^{x}<0\right\}$

7.3. $C=\left\{x\in\mathbb{R}: 2\times 4^{3x}-3\leq 9\times 4^{-3x}\right\}$



8. Seja *f* a função, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x)=\dfrac{k\,x^5}{e^{\frac{2}{x}}}$, sendo k um número real diferente de 0.

Prove que o eixo Oy é uma assíntota ao gráfico de *f*.

FIM

COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**6.4.**	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.**	
8	13	14	17	8	8	13	8	17	8	17	13	13	13	17	13	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$