



www.esffranco.edu.pt
(2021/2022)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 18

2.º Período

02/02/2022

Duração: 100 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

--	--	--

O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. O casal Pereira convidou os casais Correia, Morgado e Nunes para um jantar em sua casa.

Todas as oito pessoas irão sentar-se numa mesa redonda, nos lugares A , B , C , D , E , F , G e H .

Para ficar mais perto da cozinha, a Efigénia Pereira vai sentar-se no lugar A .

- 1.1. Suponha que o marido da Efigénia se quer sentar ao seu lado.

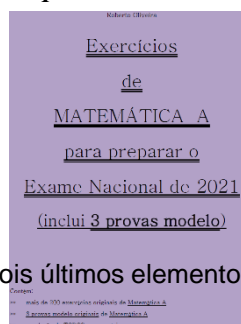
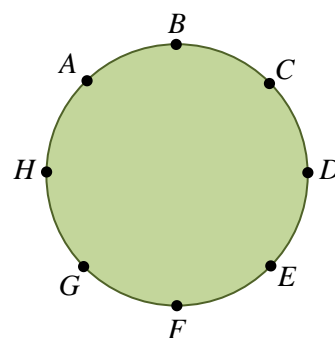
De quantas maneiras podem se sentar as oito pessoas na mesa?

(A) 5040 (B) 2520 (C) 1440 (D) 720

- 1.2. Admita agora que o marido da Efigénia se vai sentar no lugar B .

Determine a probabilidade de os dois elementos de cada casal se sentarem lado a lado e a Luana Correia ficar ao lado da Efigénia, no lugar H .

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.



2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 30.

Escolhendo, ao acaso, três elementos dessa linha, qual é a probabilidade, arredondado às milésimas, de todos eles serem superiores a 2000?

(A) 0,022 (B) 0,027 (C) 0,631 (D) 0,636

3. Uma partícula desloca-se sobre uma reta numérica e a sua posição, em metros, é dada, após t segundos, por:

$$p(t) = t^3 - 4t^2 + 5t + 1$$

- 3.1. Sem recorrer à calculadora, determine o(s) instante(s) em que a velocidade da partícula foi de 5 metros por segundo.

- 3.2. Qual foi a aceleração média da partícula nos primeiros 2 segundos?

(A) -2 m/s^2 (B) -1 m/s^2 (C) $0,75 \text{ m/s}^2$ (D) $1,25 \text{ m/s}^2$

4. Uma nova empresa pretende lançar no mercado caixas para transporte de quadros. Essas caixas deverão ter a forma de um prisma quadrangular regular, de altura e lado da base iguais a x e y metros, respetivamente.

Por questões de *marketing*, sabe-se que $x + y = 5$.

Seja $V(x)$ a função que representa o volume, em metros cúbicos, da caixa.

4.1. Mostre que $V(x) = x^3 - 10x^2 + 25x$.

4.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, determine a altura x da caixa para o qual o seu volume é máximo.

Apresente o valor em centímetros, arredondado às unidades.



5. De uma função g , duas vezes diferenciável em \mathbb{R} , sabe-se que:

- $A(a, a)$ é um ponto do seu gráfico, $a > 1$;
- $y = a$ é a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto A ;
- $g''(x) = 1 - 2x$.

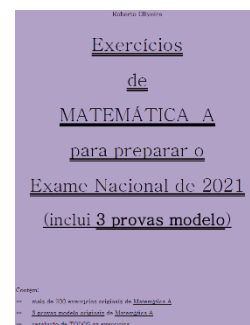
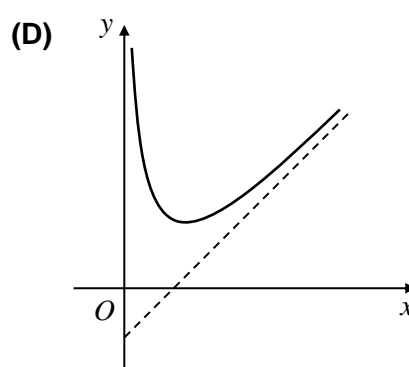
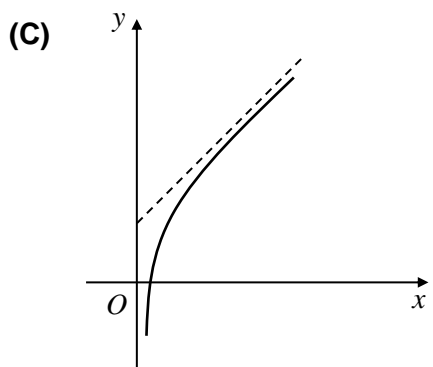
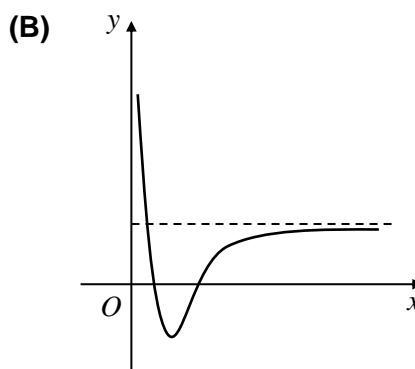
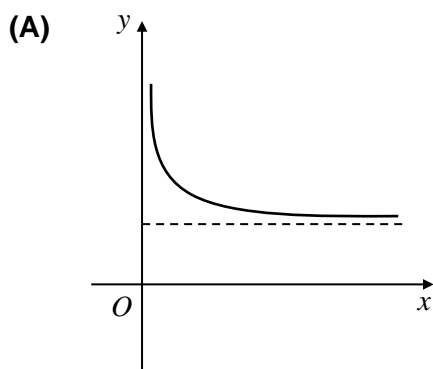
Qual é a afirmação necessariamente verdadeira?

- (A) a é um zero de g .
- (B) a é um mínimo de g .
- (C) a é um máximo de g .
- (D) A é um ponto de inflexão do gráfico de g .

6. Considere a função h , diferenciável em \mathbb{R}^+ , e tal que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} < 0 \quad \forall a \in]0, 1[$.

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função h ?



7. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ e tal que $f'(x) = \frac{2x^2 - 10x}{x+4}$.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f , se existirem.

8. Considere a função f , de domínio $[1, +\infty[$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{\operatorname{sen}(x-4)} & \text{se } 1 \leq x < 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \\ x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right) - 2 & \text{se } x > 4 \end{cases}$.

8.1. Mostre que a função f é contínua no ponto de abscissa 4.

8.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos. Se existirem, indique as suas equações.

9. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$.

9.1. Sem usar a calculadora, determine a expressão geral das abscissas dos pontos de interseção entre o gráfico de g e a reta de equação $y = 1$.

9.2. Considere agora a função h , de domínio $[0, \pi]$, definida por $h(x) = \frac{g(x)}{x+1}$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[ABC]$, onde:

- A é o ponto do gráfico de h cuja ordenada é máxima;
- B é o ponto do eixo Ox de abscissa igual à de A ;
- C é o ponto do gráfico de h de abscissa π .

Na sua resposta, deve:

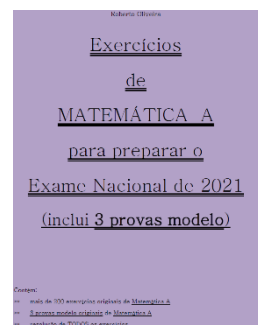
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- esboçar o triângulo $[ABC]$;
- indicar as coordenadas dos pontos A , B e C , sempre que possível, com duas casas decimais;
- determinar o valor pedido, arredondado às décimas.

10. Resolva apenas uma das equações a seguir, nos intervalos indicados.

10.1. $\operatorname{sen}(6x) + \cos(3x) = 0$ em $\left] -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$.

10.2. $2 \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) = 1 + 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)$ em $[2\pi, 5\pi]$.

11. Para os valores de x que dão sentido à expressão, mostre que $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg}^2(2x) - 2[\operatorname{tg}(2x)\operatorname{sen} x]^2} = \frac{\cos(2x)}{4\cos^2 x}$.



FIM

COTAÇÕES

Item																	
Cotação (em pontos)																	
1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.	11.	215
8	11	8	15	8	11	15	8	8	18	15	15	15	15	15	15	15	

Formulário

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

Exercícios
de
MATEMÁTICA A
para preparar o
Exame Nacional de 2021
(inclui 3 provas modelo)

mais de 100 exercícios selecionados de Matemática A
e Matemática B para preparar o Exame Nacional de 2021
com 3000+ exercícios