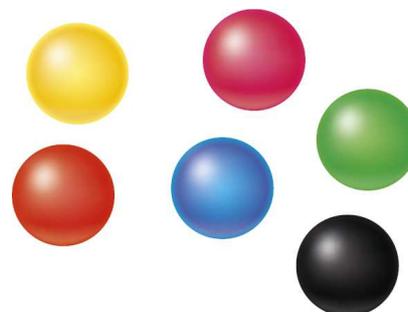




Nome: \_\_\_\_\_

Ano / Turma: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_ - \_\_\_\_ - \_\_\_\_

1. Considera as seis bolas da figura, que apenas diferem na cor, sendo duas vermelhas, uma amarela, uma azul, uma verde e uma preta. As seis bolas vão ser colocadas aleatoriamente, lado a lado, em linha.



Determina a probabilidade de a bola preta ficar entre as bolas vermelhas em posições consecutivas.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

- (A)  $\frac{1}{15}$                       (B)  $\frac{1}{30}$                       (C)  $\frac{2}{15}$                       (D)  $\frac{1}{3}$

2. Num estudo estatístico sobre videojogos, participaram 500 jovens.

Sabe-se que:

- 45% dos participantes são raparigas;
- 40% das raparigas jogam videojogos;
- 43% dos participantes não jogam videojogos;

Escolhe-se, ao acaso, um dos participantes no estudo.



Qual é a probabilidade de o participante escolhido ser rapaz, sabendo que não joga videojogos? Apresenta o resultado em percentagem, arredondado às décimas.

3. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por:

$$f(x) = e^{x^{-\frac{1}{x}}}$$

- 3.1. Mostra que os eixos coordenados são assíntotas ao gráfico de  $f$ , quando representado num referencial o.n.  $Oxy$ .

- 3.2. Considera a afirmação:

“Dada uma função, se a derivada é positiva em todos os pontos do domínio, então a função é crescente.”

Utiliza a função  $f$  para mostrar que a **afirmação é falsa**.

4. Para valores positivos de  $k$ , considera a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln(x+k) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

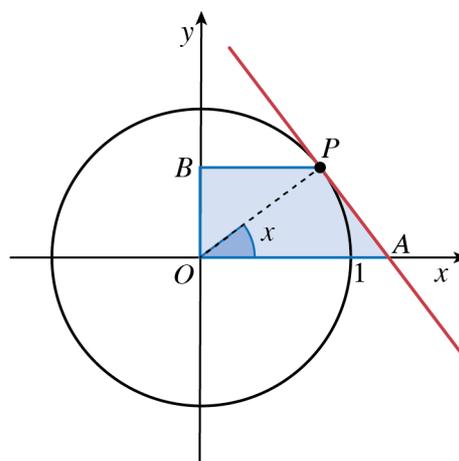
Para que valor de  $k$  se obtém uma função contínua em  $x=0$ ?

- (A) 2                      (B)  $2e$                       (C)  $e^2$                       (D)  $\frac{2}{e}$

5. Na figura, em referencial o.n.  $Oxy$ , estão representados uma circunferência de centro  $O$  e raio 1 e um trapézio  $[OAPB]$ .

Sabe-se que:

- $P$  é um ponto do primeiro quadrante que pertence à circunferência;
- o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  e a reta  $AP$  é perpendicular à reta  $OP$ ;
- o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$  e a reta  $BP$  é paralela ao eixo  $Ox$ .



Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude do

ângulo  $AOP$ , com  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

5.1. Determina as coordenadas do ponto  $A$ , se  $x = \frac{\pi}{6}$ .

5.2. Seja  $f$  a função de domínio  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  que a cada valor de  $x$  faz corresponder a área do trapézio  $[OAPB]$ .

Admite que o ponto  $A$  tem coordenadas  $\left(\frac{1}{\cos x}, 0\right)$  e mostra que  $f(x) = \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{2 \cos x}$ .

6. Considera a função  $f$ , de domínio  $[0, \pi]$ , definida por:

$$f(x) = x + \sin(2x)$$

6.1. Na figura está representado o gráfico da função  $f$ .

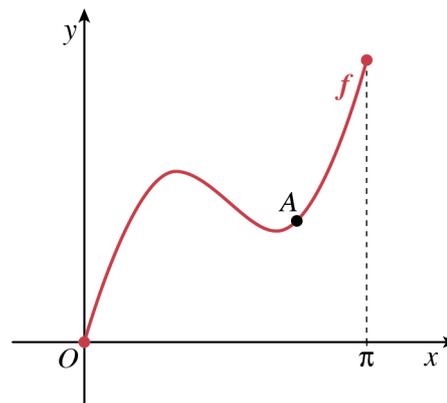
Sabe-se que o ponto  $A$  pertence ao gráfico de  $f$ , tem

abscissa pertencente ao intervalo  $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$  e a reta tangente

ao gráfico no ponto  $A$  é paralela à reta definida pela

equação  $y = x$ .

Determina a abscissa do ponto  $A$ .



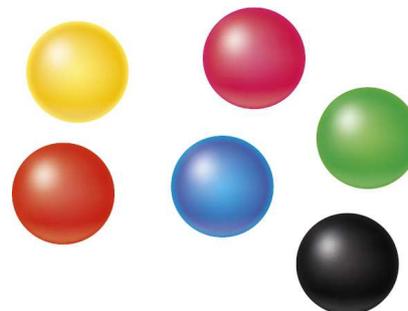
6.2. O gráfico de  $f$  tem um único ponto de inflexão. Determina as coordenadas desse ponto.

7. Considera, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, o número complexo  $z = \frac{i^2 + i}{2 - i}$ .

No plano complexo, o afixo do número complexo  $z$  pertence a uma circunferência de centro  $O$ , afixo do número 0. Determina o raio dessa circunferência.



1. Considera as seis bolas da figura, que apenas diferem na cor, sendo duas vermelhas, uma amarela, uma azul, uma verde e uma preta. As seis bolas vão ser colocadas aleatoriamente, lado a lado, em linha.



Determina a probabilidade de a bola preta ficar entre as bolas vermelhas em posições consecutivas.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

- (A)  $\frac{1}{15}$                       (B)  $\frac{1}{30}$                       (C)  $\frac{2}{15}$                       (D)  $\frac{1}{3}$

Número de casos favoráveis:  $4 \times 3! = 24$

Número de casos possíveis:  $\frac{6!}{2!} = 360$

Probabilidade pedida:  $\frac{24}{360} = \frac{1}{15}$

**Resposta:** Opção (A)  $\frac{1}{15}$

2. Num estudo estatístico sobre videojogos, participaram 500 jovens.

Sabe-se que:

- 45% dos participantes são raparigas;
- 40% das raparigas jogam videojogos;
- 43% dos participantes não jogam videojogos;

Escolhe-se, ao acaso, um dos participantes no estudo.



Qual é a probabilidade de o participante escolhido ser rapaz, sabendo que não joga videojogos? Apresenta o resultado em percentagem, arredondado às décimas.

Sejam  $R$  e  $J$  os acontecimentos:

$R$ : “O participante escolhido é uma rapariga.”  $J$ : “O participante escolhido joga videojogos.”

$$P(\overline{R}|\overline{J}) = ?$$

$$0,45 \times 500 = 225 \text{ (número de raparigas que participaram no estudo)}$$

$$500 - 225 = 275 \text{ (número de rapazes que participaram no estado)}$$

$$0,4 \times 225 = 90 \text{ (número de raparigas participantes que jogam videojogos)}$$

$225 - 90 = 135$  (número de raparigas participantes que não jogam videojogos)

$0,43 \times 500 = 215$  (número de participantes que não joga vídeo jogos)

$215 - 135 = 80$  (número de rapazes participantes que não jogam videojogos)

|           |     |           |     |
|-----------|-----|-----------|-----|
|           | $J$ | $\bar{J}$ |     |
| $R$       | 90  | 135       | 225 |
| $\bar{R}$ |     | 80        | 275 |
|           |     | 215       | 500 |

$$P(\bar{R}|\bar{J}) = \frac{P(\bar{R} \cap \bar{J})}{P(\bar{J})} = \frac{80}{215} = \frac{0,16}{0,43} \approx 0,372$$

**Resposta:** 37,2%

3. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por:

$$f(x) = e^{x - \frac{1}{x}}$$

3.1. Mostra que os eixos coordenados são assíntotas ao gráfico de  $f$ , quando representado num referencial o.n.  $Oxy$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x - \frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x - \frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x - \frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 0$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

3.2. Considera a afirmação:

“Dada uma função, se a derivada é positiva em todos os pontos do domínio, então a função é crescente.”

Utiliza a função  $f$  para mostrar que a **afirmação é falsa**.

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ e } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = \left( e^{\frac{1}{x}} \right)' = \left( x - \frac{1}{x} \right)' e^{\frac{1}{x}} = \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}}$$

Repara que:

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \wedge e^{\frac{1}{x}} > 0$ , logo conclui-se que:  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Por exemplo:  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}$  e  $f(1) = e^0 = 1$

Então,  $-\frac{1}{2} < 1$  e  $f\left(-\frac{1}{2}\right) > f(1)$ , o que contraria a definição de função crescente.

A função  $f$  não é crescente no seu domínio.

4. Para valores positivos de  $k$ , considera a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln(x+k) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que valor de  $k$  se obtém uma função contínua em  $x=0$ ?

- (A) 2                      (B)  $2e$                       (C)  $e^2$                       (D)  $\frac{2}{e}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 2 \times \frac{\sin x}{x} \times \cos x \right) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$f(0) = \ln(k)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+k) = \ln k$$

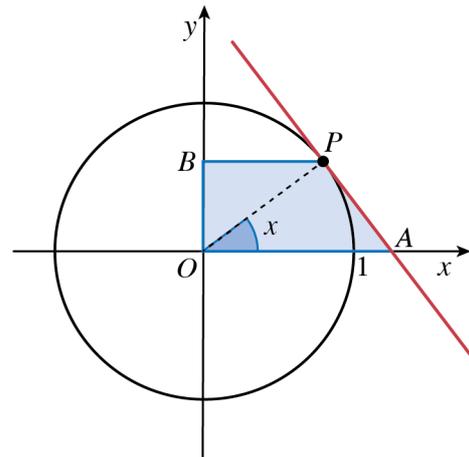
$$\ln(k) = 2 \Leftrightarrow k = e^2$$

**Resposta:** Opção (C)  $e^2$

5. Na figura, em referencial o.n.  $Oxy$ , estão representados uma circunferência de centro  $O$  e raio 1 e um trapézio  $[OAPB]$ .

Sabe-se que:

- $P$  é um ponto do primeiro quadrante que pertence à circunferência;
- o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  e a reta  $AP$  é perpendicular à reta  $OP$ ;
- o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$  e a reta  $BP$  é paralela ao eixo  $Ox$ .



Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude do

ângulo  $AOP$ , com  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

- 5.1. Determina as coordenadas do ponto  $A$ , se  $x = \frac{\pi}{6}$ .

Se  $x = \frac{\pi}{6}$ , então as coordenadas do ponto  $P$  são  $\left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right)$ , ou seja,  $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

O declive da reta  $OP$  é igual a  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

O declive da reta  $AP$  é igual a  $-\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$ .

Equação da reta  $AP$ :  $y = -\sqrt{3}x + b$

O ponto  $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  pertence à reta  $AP$ . Então:  $\frac{1}{2} = -\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 2$

$AP$ :  $y = -\sqrt{3}x + 2$

Se  $y = 0$ , então:  $0 = -\sqrt{3}x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

**Resposta:** As coordenadas do ponto  $A$  são  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ .

5.2. Seja  $f$  a função de domínio  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  que a cada valor de  $x$  faz corresponder a área do trapézio  $[OAPB]$ .

Admite que o ponto  $A$  tem coordenadas  $\left(\frac{1}{\cos x}, 0\right)$  e mostra que  $f(x) = \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{2 \cos x}$ .

$$f(x) = \frac{\overline{OA} + \overline{BP}}{2} \times \overline{OB} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \cos x}{2} \times \sin x = \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos x} \times \sin x = \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{2 \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{2 \cos x}$$

6. Considera a função  $f$ , de domínio  $[0, \pi]$ , definida por:

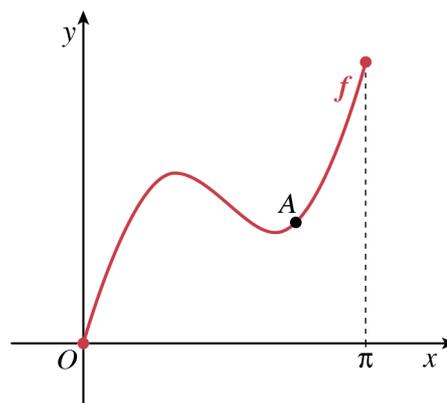
$$f(x) = x + \sin(2x)$$

6.1. Na figura está representado o gráfico da função  $f$ .

Sabe-se que o ponto  $A$  pertence ao gráfico de  $f$ , tem

abscissa pertencente ao intervalo  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$  e a reta tangente

ao gráfico no ponto  $A$  é paralela à reta definida pela equação  $y = x$ .



Determina a abscissa do ponto  $A$ .

Se a reta tangente ao gráfico no ponto  $A$  é paralela à reta de equação  $y = x$ , então tem declive 1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow (x + \sin(2x))' = 1 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como a abscissa do ponto  $A$  pertence ao intervalo  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ , conclui-se que a abscissa do ponto

$A$  é  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ , ou seja,  $\frac{3\pi}{4}$ .

**Resposta:**  $\frac{3\pi}{4}$

6.2. O gráfico de  $f$  tem um único ponto de inflexão. Determina as coordenadas desse ponto.

$$f'(x) = [x + \sin(2x)]' = 1 + 2 \cos(2x)$$

$$f''(x) = [1 + 2 \cos(2x)]' = -4 \sin(2x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $D_f = [0, \pi]$ :

$$x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi$$

|          |   |  |                 |  |       |
|----------|---|--|-----------------|--|-------|
| $x$      | 0 |  | $\frac{\pi}{2}$ |  | $\pi$ |
| $f''(x)$ | 0 | -  | 0               | +  | 0     |
| $f$      | 0 |  | $\frac{\pi}{2}$ |  | $\pi$ |

O único ponto de inflexão é o ponto de coordenadas  $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ , ou seja,  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

7. Considera, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, o número complexo  $z = \frac{i^2 + i}{2 - i}$ .

No plano complexo, o afixo do número complexo  $z$  pertence a uma circunferência de centro  $O$ , afixo do número 0. Determina o raio dessa circunferência.

Seja  $r$  o raio da circunferência.

$$r = |z|$$

$$z = \frac{i^2 + i}{2 - i} = \frac{-1 + i}{2 - i} = \frac{(-1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-3 + i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

**Resposta:**  $r = \frac{\sqrt{10}}{5}$