

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

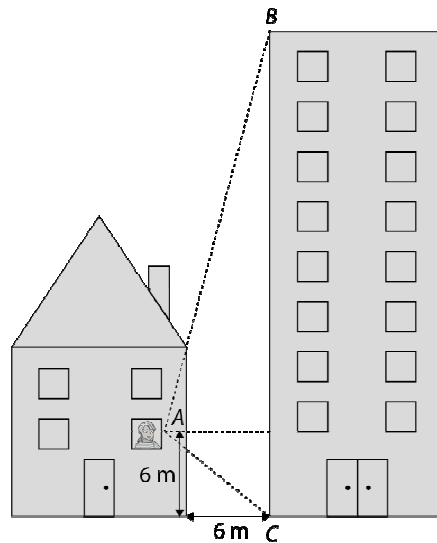
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. A D. Maria está à janela de sua casa a olhar para o prédio vizinho, que se encontra à distância de 6 metros de sua casa. Sabe-se que a janela da D. Maria também se encontra à distância de 6 metros do solo e que, considerando a figura, $\widehat{CAB} = 110^\circ$.



Determine a altura, com aproximação às décimas, do prédio vizinho da D. Maria.

Se em cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Qual das seguintes expressões designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao terceiro quadrante?

(A) $\cos x + \sin x$

(B) $\operatorname{tg} x \times \cos x$

(C) $\operatorname{tg} x - \cos x$

(D) $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$

3. Considere $A(x) = \cos^2(2021\pi + x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) - 2\sin(3\pi - x) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes.

3.1. Mostre que $A(x) = 1 - 2\sin x$.

3.2. Seja θ , tal que $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

Sabendo que $\operatorname{tg}(2020\pi - \theta) = \frac{1}{3}$, determine o valor exato de $A(\theta)$.

Apresente a sua resposta na forma $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

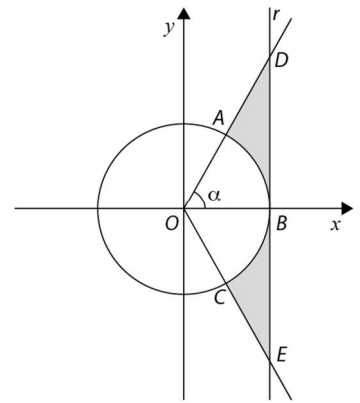
3.3. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 1 - 2\sin x$.

Determine uma expressão geral dos maximizantes de f .

4. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica e a reta r .

Sabe-se que:

- os pontos A , B e C pertencem à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo das abscissas;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B ;
- o ponto D é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\hat{O}A$;
- o ponto E é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\hat{O}C$;
- $\overline{BD} = \overline{BE}$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Qual das seguintes expressões representa, em função de α , a área da região a sombreado?

- (A) $\frac{\text{sen } \alpha - \alpha}{2}$ (B) $\text{tg } \alpha - \alpha$ (C) $\text{sen } \alpha - \alpha$ (D) $\frac{\text{tg } \alpha - \alpha}{2}$

5. Considere a função f definida por $f(x) = \text{tg}(4x) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Qual dos seguintes conjuntos pode representar o domínio da função f ?

- (A) $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 (B) $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 (C) $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

6. Considere a função f , de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por:

$$f(x) = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x + 3 \cos x + 2}.$$

6.1. Mostre que $f(x) = \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x}$.

- 6.2. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine as abscissas dos pontos do gráfico de f de ordenada 1.

- 6.3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A função f é uma função injetiva.
 (B) A função f é uma função ímpar.
 (C) A função f é uma função par.
 (D) A função f não tem zeros.

7. Seja α um valor pertencente ao intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a condição $k^2 + 2 \cos \alpha = 1$. Quais os valores reais de k para os quais a condição é possível?
- (A) $[-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}]$ (B) $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}[$ (C) $[-1, 0[$ (D) $[-\sqrt{3}, -1[$

8. Num determinado ecossistema marinho, o número de uma espécie de ouriços-do-mar variou ao longo do ano de 2019 de acordo com diversos fatores. Os biólogos marinhos que estudavam essa espécie concluíram que o número N de ouriços-do-mar, em milhares, pode ser modelado, ao longo desse ano, por uma função da forma

$$N(t) = A + B \cos\left(\frac{\pi t}{25}\right)$$

onde A e B representam constantes e t representa o tempo, em meses, sendo que $t = 0$ corresponde às 0 horas do dia 1 de janeiro de 2019.

(o argumento da função cosseno está expresso em radianos).

- 8.1. Sabendo que no início do ano havia nesse ecossistema 16 000 ouriços-do-mar e que no início do mês de outubro desse mesmo ano havia 12 500, determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, os valores das constantes A e B .

Apresente os valores pedidos com arredondamento às décimas.

- 8.2. Considere agora que $A = 10$ e $B = 6$. Num certo instante de 2019, os biólogos marinhos responsáveis por este estudo registraram o número existente, em milhares, da espécie de ouriços-do-mar.

Sabe-se que, dois meses após esse instante, o número de elementos dessa espécie diminuiu 10%. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o instante t em que tal contagem foi efetuada.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de t , com aproximação às centésimas.

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	5.	6.1.	6.2.	6.3.	7.	8.1.	8.2.	
15	10	20	20	20	10	10	20	15	10	10	20	20	200



TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1. Sejam A o ponto que representa o local onde se encontra a D. Maria, D a projeção ortogonal do ponto A no solo e E a projeção ortogonal do ponto A no prédio vizinho.

O triângulo $[ADC]$ é isósceles e retângulo em D , logo $D\hat{C}A = D\hat{A}C = 45^\circ$.

Assim:

$$E\hat{A}B = 110^\circ - 45^\circ = 65^\circ$$

e:

$$\operatorname{tg} 65^\circ = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \overline{BE} = 6 \times \operatorname{tg} 65^\circ$$

Logo:

$$\overline{BC} = 6 + 6 \operatorname{tg} 65^\circ \approx 18,9$$

O prédio tem, aproximadamente, 18,9 metros de altura.

2. Opção (C)

Se $x \in 3.^\circ$ quadrante, então $\operatorname{sen} x < 0$, $\operatorname{cos} x < 0$ e $\operatorname{tg} x > 0$. Assim:

- $\operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x < 0$
- $\operatorname{tg} x \times \operatorname{cos} x < 0$
- $\operatorname{tg} x - \operatorname{cos} x > 0$
- $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} < 0$

3.

$$\begin{aligned} 3.1. A(x) &= \cos^2(2021\pi + x) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) - 2\operatorname{sen}(3\pi - x) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= (-\cos x)^2 + (-\cos x) - (-\cos x) - 2\operatorname{sen} x + (-\operatorname{sen} x)^2 = \\ &= \cos^2 x - \cos x + \cos x - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x = \\ &= 1 - 2\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \operatorname{tg}(2020\pi - \theta) &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Como $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, tem-se que:

$$1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{9}{10}$$



- Como $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{9}{10} + \sin^2 \theta = 1 &\Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{10}} \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

Como $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, vem que $\sin \theta < 0$.

$$\text{Logo, } \sin \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Assim:

$$A(\theta) = 1 - 2 \sin \theta = 1 - 2 \left(-\frac{\sqrt{10}}{10} \right) = 1 + \frac{\sqrt{10}}{5} = 1 + \frac{1}{5}\sqrt{10}$$

3.3. Sabemos que $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Assim:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq -2 \sin x \leq 2 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq 1 - 2 \sin x \leq 3 \end{aligned}$$

Logo, $D'_f = [-1, 3]$.

3 é, então, máximo de f , logo os maximizantes de f são os valores de x tais que $f(x) = 3$:

$$1 - 2 \sin x = 3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

4. Opção (B)

Seja A a área da região a sombreado.

$$\begin{aligned} A &= 2(A_{\Delta[BOD]} - A_{\text{setor circular}}) = 2 \left(\frac{\overline{OB} \times \overline{BD}}{2} - \frac{\alpha \times 1^2}{2} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{1 \times \text{tg } \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \text{tg } \alpha - \alpha \end{aligned}$$

5. Opção (D)

O domínio da função f pode ser representado pelo seguinte conjunto:

$$\begin{aligned} \left\{ x \in \mathbb{R} : 4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} &= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$



6.

$$\begin{aligned} 6.1. f(x) &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + 3 \cos x + 2} = \frac{1 - \cos^2 x}{(\cos x + 1)(\cos x + 2)} = \\ &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(2 + \cos x)} = \\ &= \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3+1}{2} \vee \cos x = \frac{-3-1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = -2 \end{aligned}$$

Logo, $\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 = (\cos x + 1)(\cos x + 2)$.

6.2. Pretende-se os valores de $x \in]-\pi, \pi[$ tais que $f(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x} = 1 &\Leftrightarrow 1 - \cos x = 2 + \cos x \Leftrightarrow -2 \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Em $]-\pi, \pi[$, os valores de x pretendidos são $-\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

6.3. Opção (C)

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x}$$

$$f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x}$$

$$-f(x) = -\frac{1 - \cos x}{2 + \cos x} = \frac{\cos x - 1}{2 + \cos x}$$

- A opção (A) não apresenta uma afirmação verdadeira, pois existem objetos diferentes com a mesma imagem por f , por exemplo, $-\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$ e $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
- A opção (B) não apresenta uma afirmação verdadeira, pois não é verdade que para qualquer valor de x do domínio $]-\pi, \pi[$ se tenha $f(-x) = -f(x)$.
- A opção (C) apresenta uma afirmação verdadeira, pois, para qualquer valor de x do domínio $]-\pi, \pi[$, tem-se que $f(-x) = f(x)$.
- A opção (D) não apresenta uma afirmação verdadeira, pois, por exemplo, 0 é um zero de f .

$$f(0) = \frac{1 - \cos 0}{2 + \cos 0} = 0.$$

7. Opção (A)

$$k^2 + 2 \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1 - k^2}{2}$$

Como $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $-1 \leq \cos \alpha < 0$.



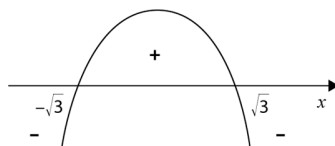
Assim:

$$-1 \leq \frac{1-k^2}{2} < 0 \Leftrightarrow -2 \leq 1-k^2 < 0 \Leftrightarrow 1-k^2 \geq -2 \wedge 1-k^2 < 0$$

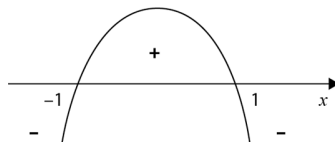
$$\Leftrightarrow 3-k^2 \geq 0 \wedge 1-k^2 < 0$$

Cálculos auxiliares

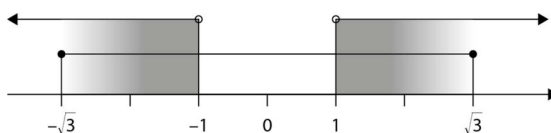
• $3 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 3 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}$



• $1 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$



$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3} \wedge (k < -1 \vee k > 1)$$



Logo, $k \in [-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}]$.

8.

8.1. $t = 0$ corresponde ao início do mês de janeiro.

$t = 9$ corresponde ao início do mês de outubro.

$$\begin{cases} N(0) = 16 \\ N(9) = 12,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B \cos 0 = 16 \\ A + B \cos \left(\frac{9\pi}{25}\right) = 12,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 16 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 16 - B \\ 16 - B + B \cos \left(\frac{9\pi}{25}\right) = 12,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ B \left(-1 + \cos \left(\frac{9\pi}{25}\right)\right) = 12,5 - 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 16 - B \\ B = \frac{-3,5}{-1 + \cos \left(\frac{9\pi}{25}\right)} \end{cases}$$

Assim, $B \approx 6,1$ e $A \approx 9,9$.

8.2. Sabe-se que, para um determinado valor de t , $N(t + 2) = N(t) - 0,1N(t)$, isto é:

$$N(t + 2) = 0,9 N(t)$$

Pretende-se, então, resolver a equação:

$$10 + 6 \cos\left(\frac{\pi(t+2)}{25}\right) = 0,9 \times \left(10 + 6 \cos\left(\frac{\pi t}{25}\right)\right)$$

Recorrendo à calculadora gráfica:

$$y_1 = 10 + 6 \cos\left(\frac{\pi(x+2)}{25}\right)$$

$$y_2 = 0,9 \left(10 + 6 \cos\left(\frac{\pi x}{25}\right)\right)$$

Assim, $t \approx 7,73$.

