

Prova-Modelo de Exame
Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

A prova inclui 4 itens, os itens 5.1, 5.2, 7.1 e 7.2, devidamente identificados com uma moldura no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham a melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n - 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Num laboratório farmacêutico foi criado um teste para a deteção de um determinado vírus em pessoas que apresentam um certo conjunto de sintomas.

1.1. Sabe-se que a probabilidade de uma pessoa contrair o vírus é 25%. Dos estudos feitos a pacientes que apresentam esse conjunto de sintomas, concluiu-se que:

- o teste apresenta um resultado positivo em 90% dos pacientes que contraíram o vírus;
- em cada quatro pacientes com resultado positivo no teste, três contraíram o vírus.

O teste foi realizado a um paciente que apresenta o conjunto de sintomas referido. Determine a probabilidade de o paciente não ter contraído o vírus e de o teste apresentar um resultado negativo.

1.2. Todas as embalagens destes testes têm um código diferente formado por sete caracteres: cinco algarismos, escolhidos entre os algarismos de 1 a 9, e duas letras, escolhidas de entre as 26 letras do alfabeto. Quantos desses códigos são constituídos apenas por vogais e com exatamente dois algarismos 9?

- (A) 12 800 (B) 128 000 (C) 2 150 400 (D) 2 688 000

2. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - ax^3\right)^n$, com $x > 0$, a constante positiva e $n \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que:

- ${}^nC_0 + {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n = 64$;
- $-20\,000x^8$ é o termo de grau 8.

O valor de a é igual a:

- (A) 5 (B) 4 (C) 6 (D) 8

3. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

3.1. Considere $w_1 = \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}} + 8e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{24}(-i^{2020} - i^{-5})}$.

Sabe-se que w_1 é uma raiz de ordem 8 de um certo número complexo w .

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de w .

Apresente o resultado na forma algébrica.

3.2. Seja z um número complexo diferente de zero.

Prove que $\left|\frac{3|z|}{z} - \frac{4i\bar{z}}{|z|}\right| = 5$.

4. Uma criança está a andar num balanço num jardim. Atrás do balanço, há um muro que limita esse jardim.

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Quinze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o balanço, arrastando os pés no chão.

Admita que a distância, em decímetros, da posição da cadeira ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por:

$$d(t) = \begin{cases} 20 + t \cos(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 15 \\ 20 + 15e^{15-t} \cos(\pi t) & \text{se } t \geq 15 \end{cases}$$

O argumento da função cosseno está expresso em radianos.

4.1. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, justifique que houve, pelo menos, um instante, entre os catorze segundos e os dezasseis segundos, após o início da contagem do tempo, em que a distância da posição da cadeira ao muro foi igual a 30 decímetros.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o instante em que a distância da posição da cadeira ao muro é máxima e o valor da distância máxima.

Apresente os dois valores arredondados às unidades.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular reto. Sabe-se que uma das bases do prisma está contida no plano α de equação $2x - 5y - 2z + 80 = 0$ e que a outra base está contida no plano β que contém o ponto A de coordenadas $(1, 2, 3)$.

5.1. Considere ainda os pontos B e C , dos quais se sabe que:

- o ponto B pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada igual a 2;
- o ponto C pertence ao plano α e ao eixo das cotas.

A amplitude do ângulo ABC , com aproximação à décima de grau, é:

- (A) $42,1^\circ$ (B) $44,5^\circ$ (C) $135,5^\circ$ (D) $137,9^\circ$

5.2. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o valor exato da altura do prisma.

6. Lança-se um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, três vezes consecutivas e regista-se o número da face que ficou voltada para cima em cada um dos lançamentos. Sejam a , b e c os números obtidos no primeiro, no segundo e no terceiro lançamentos, respetivamente.

Considere, num referencial ortonormado Oxy do plano, a reta r definida pela equação reduzida $y = \frac{a}{b}x + c$.

Qual é a probabilidade de a reta r ter inclinação 45° ?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{216}$ (D) $\frac{5}{6}$

7. Seja r um número real maior que um.

Seja (u_n) uma progressão geométrica de termos positivos, razão r e primeiro termo a .

- 7.1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) (u_n) é limitada. (B) (u_n) é convergente.
(C) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ (D) $\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

- 7.2. Sabendo que a soma dos quatro primeiros termos da sucessão (u_n) é igual à soma dos dois termos seguintes, determine o valor de r .

8. Seja k um número real. Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$.

Sabe-se que o valor do limite de (u_n) é solução da equação $\ln(ex) = k$. Qual é o valor de k ?

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

9. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(-x) - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- 9.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$
(C) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (D) Não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

- 9.2. Estude, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a função g quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

9.3. Estude, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $] -\infty, 0[$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g .

10. Para cada número real k , considere a função f , de domínio $] -\frac{\pi}{2}, \pi[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(3x^2)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + k & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 2\text{sen}(x)\cos(x) & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

10.1. O valor de k para o qual a função f é contínua em $x = 0$ é:

- (A) -3 (B) 0 (C) $\frac{1}{3}$ (D) 3

10.2. No intervalo $]0, \pi[$, seja r a reta tangente ao gráfico da função f que tem declive mínimo. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o declive da reta r .

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	5.1.				5.2.				7.1.				7.2.		Subtotal
Cotação (em pontos)	16				20				16				20		72
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	6.	8.	9.1.	9.2.	9.3.	10.1.	10.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														128
TOTAL															200

Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

V : “O paciente contraiu o vírus.”

T : “O teste apresenta um resultado positivo.”

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(V) = 0,25$
- $P(T|V) = 0,9$
- $P(V|T) = \frac{3}{4} = 0,75$

Pretende-se determinar o valor de $P(\overline{V} \cap \overline{T})$.

Assim:

	T	\overline{T}	
V	0,225	0,025	0,25
\overline{V}	0,075	0,675	0,75
	0,3	0,7	1

Portanto, $P(\overline{V} \cap \overline{T}) = 0,675$.

Cálculos auxiliares

- $P(T|V) = 0,9 \Leftrightarrow \frac{P(T \cap V)}{P(V)} = 0,9$
 $\Leftrightarrow P(T \cap V) = 0,9 \times 0,25$
 $\Leftrightarrow P(T \cap V) = 0,225$
- $P(V|T) = 0,75 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = 0,75$
 $\Leftrightarrow \frac{0,225}{P(T)} = 0,75$
 $\Leftrightarrow P(T) = \frac{0,225}{0,75}$
 $\Leftrightarrow P(T) = 0,3$

1.2. Opção (D)

$$\frac{V _ V _ 9 _ 9 _ \text{alg.} _ \text{alg.} _ \text{alg.}}{5 \times 5 \times 1 \times 1 \times 8 \times 8 \times 8} \times {}^7C_2 \times {}^5C_2 = 2\,688\,000$$

onde 7C_2 é o número de maneiras de escolher duas das sete posições para colocar as duas vogais escolhidas e 5C_2 é o número de maneiras de escolher duas das cinco posições restantes para colocar os dois algarismos 9.

2. Opção (A)

Sabemos que ${}^nC_0 + {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n = 64$, isto é, $2^n = 64$, ou seja, $n = 6$.

O termo geral do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - ax^3\right)^6$ é:

$$\begin{aligned}
 & {}^6C_k \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6-k} \times (-ax^3)^k, \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
 & {}^6C_k \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6-k} \times (-ax^3)^k = {}^6C_k \frac{2^{6-k}}{(\sqrt[3]{x})^{6-k}} \times (-a)^k \times x^{3k} = \\
 & = {}^6C_k \times 2^{6-k} \times (-a)^k \times \frac{x^{3k}}{x^{2-\frac{k}{3}}} = \\
 & = {}^6C_k \times 2^{6-k} \times (-a)^k \times x^{\frac{10k}{3}-2}
 \end{aligned}$$

Pretendemos determinar o termo de grau 8:

$$\frac{10k}{3} - 2 = 8 \Leftrightarrow \frac{10k}{3} = 10 \Leftrightarrow k = 3$$

O termo de ordem 8 é, então, igual a:

$${}^6C_3 \times 2^3 \times (-a)^3 \times x^8 = -160a^3x^8$$

Logo:

$$-160a^3 = 20\,000 \Leftrightarrow a^3 = 125 \Leftrightarrow a = 5$$

3.

$$\begin{aligned} 3.1. w_1 &= \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{24}(-i^0 - i^3)} = \frac{2\sqrt{3} + 2i - 4\sqrt{3} + 4i}{\sqrt{24}(-1 + i)} = \\ &= \frac{-2\sqrt{3} + 6i}{\sqrt{24}(-1 + i)} = \\ &= \frac{\sqrt{48}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{24} \times \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \\ &= e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \\ &= e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= (w_1)^8 = e^{i\left(-\frac{8\pi}{12}\right)} = \\ &= e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \\ &= \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \left| \frac{3|z|}{z} - \frac{4i\bar{z}}{|z|} \right| &= \left| \frac{3|z|^2 - 4i\bar{z}z}{z|z|} \right| = \left| \frac{3|z|^2 - 4i|z|^2}{z|z|} \right| = \\ &= \left| \frac{|z|^2(3-4i)}{z|z|} \right| = \\ &= \left| \frac{|z|(3-4i)}{z} \right| = \\ &= \frac{|z|(3-4i)}{|z|} = \\ &= \frac{|z||3-4i|}{|z|} = \\ &= \sqrt{9+16} = \\ &= \sqrt{25} = \\ &= 5 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

- $2020 = 4 \times 505 + 0$

$$i^{2020} = i^0 \qquad i^{-5} = i^{-5+8} = i^3$$

- $|-2\sqrt{3} + 6i| = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48}$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{6}{-2\sqrt{3}} \wedge \theta \in 2^\circ\text{Q} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3} \wedge \theta \in 2^\circ\text{Q}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \text{ por exemplo}$$

- $|-1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\operatorname{tg}\beta = -1 \wedge \beta \in 2^\circ\text{Q}$$

$$\beta = \frac{3\pi}{4}, \text{ por exemplo}$$

4.

4.1. Pretende-se provar que $\exists c \in]14,16[$ tal que $d(c) = 30$.

Começemos por provar que d é uma função contínua no seu domínio \mathbb{R}_0^+ :

- d é contínua em $[0, 15[$, visto, neste intervalo, a função d estar definida pela soma de duas funções contínuas (uma função constante e o produto de duas funções contínuas);
- d é contínua em $]15, +\infty[$, visto, neste intervalo, a função d estar definida pela soma de duas funções contínuas (uma função constante e o produto de duas funções contínuas);
- d é contínua em $x = 15$, visto que $\lim_{t \rightarrow 15^-} d(t) = \lim_{t \rightarrow 15^+} d(t) = d(15)::$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 15^-} (20 + t \cos(\pi t)) &= 20 + 15 \cos(15\pi) = \\ &= 20 + 15 \times (-1) = \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 15^+} (20 + 15e^{15-t} \cos(\pi t)) &= 20 + 15 e^{15-15} \cos(15\pi) = \\ &= 20 + 15 \times e^0 \times (-1) = \\ &= 5 = d(15) \end{aligned}$$

d é então uma função contínua em todo o seu domínio \mathbb{R}_0^+ , logo é contínua, em particular, em $[14, 16] \subset \mathbb{R}_0^+$.

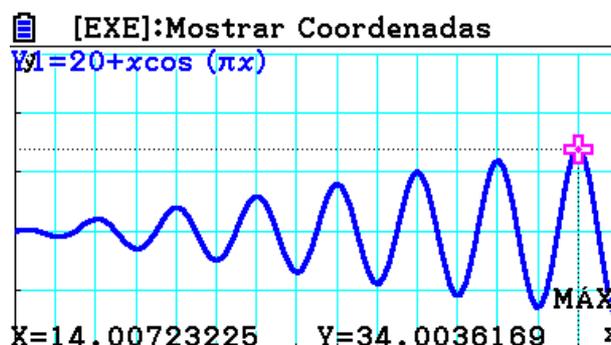
$$d(14) = 20 + 14 \cos(14\pi) = 20 + 14 \times 1 = 34 > 30$$

$$d(16) = 20 + 15e^{15-16} \cos(16\pi) \approx 25,52 < 30$$

Como d é contínua em $[14, 16]$, e como $d(16) < 30 < d(14)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]14,16[$ tal que $d(c) = 30$.

4.2. Pretende-se calcular a distância máxima atingida entre a cadeira e o muro e o respetivo instante em que tal se verificou, durante os primeiros 15 segundos em que a criança está a dar balanço.

$$y = 20 + x \cos(\pi x), \text{ com } x \in [0, 15[$$



A distância máxima é igual a 34 dm, para $t = 14$ segundos, aproximadamente.

5.

5.1. Opção (C)

O ponto B pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada igual a 2, logo as coordenadas de B são da forma $(2, 2, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

$$2 \times 2 - 5 \times 2 - 2z + 80 = 0 \Leftrightarrow z = 37$$

Logo, $B(2, 2, 37)$.

O ponto C pertence ao plano α e ao eixo das cotas, logo as coordenadas de C são da forma $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

$$2 \times 0 - 5 \times 0 - 2z + 80 = 0 \Leftrightarrow z = 40$$

Logo, $C(0, 0, 40)$.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 2, 3) - (2, 2, 37) = (-1, 0, -34)$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 34^2} = \sqrt{1157}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, 0, 40) - (2, 2, 37) = (-2, -2, 3)$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{BA, BC})$$

$$(-1, 0, -34) \cdot (-2, -2, 3) = \sqrt{1157} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{BA, BC})$$

$$\Leftrightarrow 2 + 0 - 102 = \sqrt{1157} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{BA, BC})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BA, BC}) = \frac{-100}{\sqrt{1157} \times \sqrt{17}}$$

Assim, $\widehat{BA, BC} \approx 135,5^\circ$.

5.2. Seja I o ponto de interseção entre o plano α e a reta perpendicular a α e que passa pelo ponto A .

A altura do prisma é, então, a distância entre os pontos A e I .

Equação vetorial da reta AI : $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(2, -5, -2)$, $k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico: $(1 + 2k, 2 - 5k, 3 - 2k)$, $k \in \mathbb{R}$

Para que o ponto pertença ao plano α , terá que verificar:

$$2(1 + 2k) - 5(2 - 5k) - 2(3 - 2k) + 80 = 0 \Leftrightarrow 2 + 4k - 10 + 25k - 6 + 4k + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow 33k = -66$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

Assim, o ponto I (ponto de interseção de α com a reta AI) tem coordenadas:

$$(1 + 2 \times (-2), 2 - 5 \times (-2), 3 - 2 \times (-2)) = (-3, 12, 7)$$

A altura do prisma é:

$$d(A, I) = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (12 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{16 + 100 + 16} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$$

6. Opção (A)

A reta r tem inclinação 45° , logo:

$$m_r = \operatorname{tg}(45^\circ) \Leftrightarrow m_r = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$$

Assim:

• Número de casos possíveis: $\underbrace{6}_a \times \underbrace{6}_b \times \underbrace{6}_c = 216$

• Número de casos favoráveis: $\underbrace{6}_a \times \underbrace{1}_b \times \underbrace{6}_c = 36$

Deste modo, a probabilidade pedida é $\frac{36}{216}$, ou seja, $\frac{1}{6}$.

7.

7.1. Opção (D)

(u_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo positivo e razão superior a um, logo

(u_n) é monótona crescente e $\lim(u_n) = \lim(a \times r^{n-1}) = +\infty$.

Assim, concluímos que (u_n) não é limitada nem convergente.

Como (u_n) é crescente, então:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0 &\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow 1 > \frac{u_n}{u_{n+1}} \quad (\text{os termos de } (u_n) \text{ são positivos}) \\ &\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 \end{aligned}$$

7.2. $a \times \frac{1-r^4}{1-r} = a \times r^4 \times \frac{1-r^2}{1-r} \Leftrightarrow 1 - r^4 = r^4(1 - r^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1-r^4}{1-r^2} = r^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-r^2)(1+r^2)}{1-r^2} = r^4$$

$$\Leftrightarrow 1 + r^2 = r^4$$

$$\Leftrightarrow r^4 - r^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \times (-1)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad \underbrace{r^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \quad \vee \quad r = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Como $r > 1$, então $r = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

8. Opção (A)

$$\begin{aligned}\lim u_n &= \lim \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^n = \lim \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right)^n = \\ &= \lim \frac{\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{\lim \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{e^{-1}}{e^2} = \\ &= e^{-3}\end{aligned}$$

Atendendo a que e^{-3} é solução da equação $\ln(ex) = k$, vem que:

$$\ln(e \times e^{-3}) = k \Leftrightarrow \ln(e^{-2}) = k \Leftrightarrow -2 = k$$

9.

9.1. Opção (A)

Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe se e só se $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x) - 1}{x} = \frac{\ln(0^+) - 1}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} =$$

Consideremos a mudança de variável $\frac{1}{x} = y; x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

9.2. $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x) - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(-x)}{x} - \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(-x)}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) =\end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $-x = y; x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{-y} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \\
&= -0 - 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

$x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \\
&= e^{\frac{1}{+\infty}} = \\
&= e^0 = \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} =
\end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $\frac{1}{x} = y; x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

9.3. Em $]-\infty, 0[, g(x) = \frac{\ln(-x)-1}{x}$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\frac{-1}{-x} \times x - (\ln(-x) - 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x) + 1}{x^2} = \\
&= \frac{2 - \ln(-x)}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{\frac{-1}{-x} \times x^2 - (2 - \ln(-x)) \times 2x}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x \ln(-x)}{x^4} = \\
&= \frac{-5x + 2x \ln(-x)}{x^4} = \\
&= \frac{-5 + 2 \ln(-x)}{x^3}
\end{aligned}$$

Para $x < 0$:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-5 + 2 \ln(-x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -5 + 2 \ln(-x) = 0 \quad \wedge \quad x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(-x) = 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x = e^{\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -e^{\frac{5}{2}}$$

x	$-\infty$	$-e^{\frac{5}{2}}$		0
$-5 + 2\ln(-x)$	+	0	-	n.d.
x^3	-	-	-	n.d.
Sinal de g''	-	0	+	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	∩	P.I.	∪	n.d.

Cálculos auxiliares

$$-5 + 2\ln(-(-e^3)) = -5 + 2 \times 3 = 1 (> 0)$$

$$-5 + 2\ln(-(-e^2)) = -5 + 2 \times 2 = -1 (< 0)$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -e^{\frac{5}{2}}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-e^{\frac{5}{2}}, 0[$

$$g\left(-e^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{\ln\left(-\left(-e^{\frac{5}{2}}\right)\right) - 1}{-e^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{-e^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{-e^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{2e^{\frac{5}{2}}}$$

$\left(-e^{\frac{5}{2}}, -\frac{3}{2e^{\frac{5}{2}}}\right)$ são as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de g .

10.

10.1. Opção (A)

f é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, ou seja, se e só se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2\sin(x) \cos(x)) = 2 \sin 0 \cos 0 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(3x^2)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + k \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(3x^2)}{\sin^2 x} + k =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \times \frac{3x^2}{\sin^2(x)} \right) + k =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \times \frac{x}{\sin(x)} \times \frac{x}{\sin(x)} \times 3 \right) + k =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{3x^2 \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(3x^2)}{3x^2} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{x}} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{x}} \times 3 + k = \\
&= 1 \times 1 \times 1 \times 3 + k = \\
&= 3 + k
\end{aligned}$$

Como $3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -3$, conclui-se que o valor de k para o qual f é contínua em $x = 0$ é -3 .

10.2. Em $]0, \pi[$: $f(x) = 2\text{sen}x \cos x = \text{sen}(2x)$

$$f'(x) = 2\cos(2x)$$

$$f''(x) = -4\text{sen}(2x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4\text{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]0, \pi[$: $x = \frac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sinal de f''	n.d.	-	0	+	n.d.
Variação de f'	n.d.	\rightarrow	mín.	\rightarrow	n.d.

Cálculo auxiliar

$$f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2\cos \left(2 \times \frac{\pi}{2} \right) = 2\cos\pi = -2$$

-2 é o mínimo da função f' no intervalo considerado; portanto, -2 é o declive da reta r .